数学Ⅱ・数学B

問　題	選　択　方　法
第 1 問	必　　　答
第 2 問	必　　　答
第 3 問	いずれか 2 問を選択し，解答しなさい。
第 4 問	
第 5 問	

第１問 （必答問題）（配点　30）

〔1〕 座標平面上に点 A$(1, 0)$，P$(\cos 2\theta, \sin 2\theta)$，Q$(2\cos 3\theta, 2\sin 3\theta)$をとる。$\theta$ が $\dfrac{\pi}{3} \leqq \theta < \pi$ の範囲を動くとき，$AP^2 + PQ^2$ の最大値と最小値を求めよう。

AP^2 は

$$AP^2 = \boxed{\text{ア}} - \boxed{\text{イ}}\cos 2\theta$$
$$= \boxed{\text{ウ}} - \boxed{\text{エ}}\cos^2\theta$$

である。また，PQ^2 は

$$PQ^2 = \boxed{\text{オ}} - \boxed{\text{カ}}\cos\theta$$

である。

（数学Ⅱ・数学B第１問は次ページに続く。）

$\dfrac{\pi}{3} \leqq \theta < \pi$ であるから，$\boxed{\text{キク}} < \cos\theta \leqq \dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$ である。したがって，$\mathrm{AP}^2 + \mathrm{PQ}^2$ は，$\theta = \dfrac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}\pi$ のとき最大値 $\boxed{\text{スセ}}$ をとり，$\theta = \dfrac{\pi}{\boxed{\text{ソ}}}$ のとき最小値 $\boxed{\text{タ}}$ をとる。

（数学Ⅱ・数学B第１問は次ページに続く。）

〔2〕 a を定数とする。x の方程式

$$4^{x+a} - 2^{x+a} + a = 0 \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

がただ一つの解をもつとき，その解を求めよう。

(1) $X = 2^x$ とおくと，X のとり得る値の範囲は $\boxed{チ}$ である。$\boxed{チ}$ に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ。

⓪ $X \geqq 0$　　① $X > 0$　　② $X \geqq 1$　　③ $X > 1$

また，① を X を用いて表すと，X の 2 次方程式

$$2^{\boxed{ツテ}}X^2 - 2^{\boxed{ト}}X + a = 0 \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

となる。この 2 次方程式の判別式を D とすると

$$D = 2^{\boxed{ツテ}}\left(\boxed{ナ} - \boxed{ニ}\,a\right)$$

である。

(数学Ⅱ・数学B第 1 問は次ページに続く。)

(2) $a = \dfrac{\boxed{ナ}}{\boxed{ニ}}$ のとき，② は $\boxed{チ}$ の範囲でただ一つの解をもつ。したがって，① もただ一つの解をもち，その解は $x = \dfrac{\boxed{ヌネ}}{\boxed{ノ}}$ である。

(3) $a \neq \dfrac{\boxed{ナ}}{\boxed{ニ}}$ のとき，② が $\boxed{チ}$ の範囲でただ一つの解をもつための必要十分条件は，$\boxed{ハ}$ である。$\boxed{ハ}$ に当てはまるものを，次の ⓪～⑤ のうちから一つ選べ。

⓪ $a > 0$	① $a < 0$
② $a \geqq 0$	③ $a \leqq 0$
④ $a > \dfrac{\boxed{ナ}}{\boxed{ニ}}$	⑤ $a < \dfrac{\boxed{ナ}}{\boxed{ニ}}$

$\boxed{ハ}$ のとき，① もただ一つの解をもち，その解は

$$x = \boxed{ヒ}\,a - \boxed{フ} + \log_2\left(\boxed{ヘ} + \sqrt{\boxed{ナ} - \boxed{ニ}\,a}\right)$$

である。

第2問 (必答問題)(配点 30)

a を正の実数とし，放物線 $y = 3x^2$ を C_1，放物線 $y = 2x^2 + a^2$ を C_2 とする。C_1 と C_2 の二つの共有点を x 座標の小さい順に A，B とする。また，C_1 と C_2 の両方に第1象限で接する直線を ℓ とする。

(1) B の座標を a を用いて表すと $\left(\boxed{ア},\ \boxed{イ}\,a^{\boxed{ウ}}\right)$ である。

直線 ℓ と二つの放物線 C_1，C_2 の接点の x 座標をそれぞれ s，t とおく。ℓ は $x = s$ で C_1 と接するので，ℓ の方程式は

$$y = \boxed{エ}\,sx - \boxed{オ}\,s^{\boxed{カ}}$$

と表せる。同様に，ℓ は $x = t$ で C_2 と接するので，ℓ の方程式は

$$y = \boxed{キ}\,tx - \boxed{ク}\,t^{\boxed{カ}} + a^2$$

とも表せる。これらにより，s，t は

$$s = \frac{\sqrt{\boxed{ケ}}}{\boxed{コ}}a, \quad t = \frac{\sqrt{\boxed{ケ}}}{\boxed{サ}}a$$

である。

放物線 C_1 の $s \leqq x \leqq \boxed{ア}$ の部分，放物線 C_2 の $\boxed{ア} \leqq x \leqq t$ の部分，x 軸，および2直線 $x = s$，$x = t$ で囲まれた図形の面積は

$$\frac{\boxed{シ}\sqrt{\boxed{ス}} - \boxed{セ}}{\boxed{ソ}}a^{\boxed{タ}}$$

である。

(数学Ⅱ・数学B第2問は次ページに続く。)

⑵ 実数 p，q，r に対し，関数 $f(x) = x^3 + px^2 + qx + r$ を考える。$f(x)$ は $x = -4$ で極値をとるとする。また，曲線 $y = f(x)$ は点 A，B および原点を通るとする。

このとき，$p = \boxed{\text{チ}}$，$q = \boxed{\text{ツテト}}$，$r = \boxed{\text{ナ}}$ であり，$f(x)$ の極小値は $\boxed{\text{ニヌネ}}$ である。

また，$a = \boxed{\text{ノ}}\sqrt{\boxed{\text{ハ}}}$ であり，曲線 $y = f(x)$ と放物線 C_2 の共有点のうち，A，B と異なる点の座標は $\left(\boxed{\text{ヒフ}},\ \boxed{\text{ヘホ}}\right)$ である。

第３問 （選択問題）（配点　20）

s を定数とし，数列 $\{a_n\}$ を次のように定義する。

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_{n+1} = \frac{2a_n + s}{a_n + 2} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \qquad \cdots\cdots\cdots ①$$

(1)　$s = 4$ とする。$a_2 = \boxed{\text{ア}}$，$a_{100} = \boxed{\text{イ}}$ である。

(2)　$s = 0$ とする。$b_n = \dfrac{1}{a_n}$ とおくと，$b_1 = \boxed{\text{ウ}}$ である。さらに，b_n と b_{n+1} は関係式 $b_{n+1} = b_n + \dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$ を満たすから，$\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = \frac{\boxed{\text{カ}}}{n + \boxed{\text{キ}}}$$

である。

(3)　$s = 1$ とする。$c_n = \dfrac{1 + a_n}{1 - a_n}$ とおくと，$c_1 = \boxed{\text{ク}}$ である。さらに，c_n と c_{n+1} の関係式を求め，数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めることにより，$\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = \boxed{\text{ケ}} - \frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}^{\boxed{\text{シ}}} + 1}$$

であることがわかる。ただし，$\boxed{\text{シ}}$ については，当てはまるものを，次の⓪～④のうちから一つ選べ。

⓪　$n - 2$　　①　$n - 1$　　②　n　　③　$n + 1$　　④　$n + 2$

（数学Ⅱ・数学B第３問は次ページに続く。）

(4) (3)の数列$\{c_n\}$について

$$\sum_{k=1}^{n} c_k c_{k+1} = \frac{\boxed{\text{スセ}}}{\boxed{\text{ソ}}}\left(\boxed{\text{タ}}^{\,n} - 1\right)$$

である。

次に，(3)の数列$\{a_n\}$について考える。$s = 1$であることに注意して，① の漸化式を変形すると

$$a_n a_{n+1} = \boxed{\text{チ}}\,(a_n - a_{n+1}) + \boxed{\text{ツ}}$$

である。ゆえに

$$\sum_{k=1}^{n} a_k a_{k+1} = \boxed{\text{テ}} + \frac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{サ}}^{\boxed{\text{ナ}}} + \boxed{\text{ニ}}}$$

である。ただし，$\boxed{\text{テ}}$ と $\boxed{\text{ナ}}$ については，当てはまるものを，次の⓪～④のうちから一つずつ選べ。同じものを選んでもよい。

⓪ $n - 2$　① $n - 1$　② n　③ $n + 1$　④ $n + 2$

第4問　（選択問題）（配点　20）

点Oを原点とする座標空間に4点A(6，−1，1)，B(1，6，2)，P(2，−1，−1)，Q(0，1，−1)がある。3点O，P，Qを通る平面をαとし，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\vec{q}$とおく。平面$\alpha$上に点Mをとり，$|\overrightarrow{\mathrm{AM}}|+|\overrightarrow{\mathrm{MB}}|$が最小となるときの点Mの座標を求めよう。

(1)　$|\vec{p}|=\sqrt{\boxed{\text{ア}}}$，$|\vec{q}|=\sqrt{\boxed{\text{イ}}}$である。また，$\vec{p}$と$\vec{q}$のなす角は$\boxed{\text{ウエ}}^\circ$である。

(2)　$\vec{p}$および$\vec{q}$と垂直であるベクトルの一つとして

$$\vec{n}=\left(1,\ \boxed{\text{オ}},\ \boxed{\text{カ}}\right)$$

をとる。

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$を実数$r$，$s$，$t$を用いて$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=r\vec{n}+s\vec{p}+t\vec{q}$の形に表したときの$r$，$s$，$t$を求めよう。

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\vec{n}=\boxed{\text{キ}}$，$\vec{n}\cdot\vec{n}=\boxed{\text{ク}}$，$\vec{n}\perp\vec{p}$，$\vec{n}\perp\vec{q}$であることから，$r=\boxed{\text{ケ}}$となる。また，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\vec{p}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\vec{q}$を考えることにより，$s=\boxed{\text{コ}}$，$t=\boxed{\text{サシ}}$であることがわかる。

同様に，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$を実数$u$，$v$，$w$を用いて$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=u\vec{n}+v\vec{p}+w\vec{q}$の形に表したとき，$u=\boxed{\text{ス}}$である。

（数学Ⅱ・数学B第4問は次ページに続く。）

(3) r, s, t を(2)で求めた値であるとし，点Cは $\overrightarrow{OC} = -r\vec{n} + s\vec{p} + t\vec{q}$ となる点とする。Cの座標は

$$\left(\boxed{セ},\ \boxed{ソタ},\ \boxed{チツ} \right)$$

である。また，線分BCと平面 α との交点は，BCを $3 : \boxed{テ}$ に内分する。

$\vec{n} \perp \vec{p}$, $\vec{n} \perp \vec{q}$, $\overrightarrow{OA} = r\vec{n} + s\vec{p} + t\vec{q}$, $\overrightarrow{OC} = -r\vec{n} + s\vec{p} + t\vec{q}$ であることにより，線分ACは平面 α に垂直であり，その中点は α 上にある。よって，α 上の点Mについて，$|\overrightarrow{AM}| = |\overrightarrow{CM}|$ が成り立ち，$|\overrightarrow{AM}| + |\overrightarrow{MB}|$ が最小となるMは線分BC上にある。したがって，求めるMの座標は

$$\left(\frac{\boxed{ト}}{\boxed{ナ}},\ \frac{\boxed{ニヌ}}{\boxed{ネ}},\ \boxed{ノハ} \right)$$

である。

第5問 （選択問題）（配点　20）

以下の問題を解答するにあたっては，必要に応じて29ページの正規分布表を用いてもよい。

ある菓子工場で製造している菓子1個あたりの重さ(単位はg)を表す確率変数をXとし，Xは平均m，標準偏差σの正規分布$N(m,\ \sigma^2)$に従っているとする。

(1)　平均mが50.2で，標準偏差σが0.4のとき，この菓子工場で製造される菓子1個あたりの重さが50g未満となる確率は，$Z = \dfrac{X-m}{\sigma}$が標準正規分布に従うので

$$P(X < 50) = P\left(Z < -\boxed{\text{ア}}.\boxed{\text{イ}}\right) = 0.\boxed{\text{ウエ}}$$

である。

(2)　標準偏差σが0.4のとき，製造される菓子1個あたりの重さが50g未満となる確率が0.04となるようにmの値を定めることを考える。まず，標準正規分布に従う確率変数Zについて，$P(Z < z)$が最も0.04に近い値をとるzを正規分布表から求めると$P\left(Z < -\boxed{\text{オ}}.\boxed{\text{カキ}}\right) = 0.0401$であることがわかり，$z = -\boxed{\text{オ}}.\boxed{\text{カキ}}$となる。よって

$$P\left(Z < -\boxed{\text{オ}}.\boxed{\text{カキ}}\right) = P(X < 50)$$

と考えることにより，mを$\boxed{\text{クケ}}.\boxed{\text{コ}}$とすればよい。

（数学Ⅱ・数学B第5問は次ページに続く。）

(3)　この菓子工場では，製造された菓子を無作為に 9 個選び箱に詰めて 1 個の商品としている。 9 個の菓子の重さ(単位は g)を表す確率変数を X_1，X_2，…，X_9 とし，平均 m は 50.2，標準偏差 σ は 0.4，また，箱の重さはすべて同じで 80 g とする。商品 1 個あたりの重さ(単位は g)を表す確率変数を Y とすると，Y の平均は $\boxed{\text{サシス}}$. $\boxed{\text{セ}}$ ，Y の標準偏差は $\boxed{\text{ソ}}$. $\boxed{\text{タ}}$ である。

X_1，X_2，…，X_9 の標本平均 $\overline{X}$ が 50 未満である確率を求めよう。標本平均の分布が正規分布であることを利用すると，$\overline{X}$ の標準偏差が $\dfrac{0.4}{\boxed{\text{チ}}}$ であるので，確率は 0. $\boxed{\text{ツテ}}$ となる。

(数学Ⅱ・数学B第 5 問は次ページに続く。)

⑷　この菓子工場では，新しい機械を導入した。新しい機械については，標準偏差 σ は 0.2 であるが，平均 m はわかっていない。m を推定するために，この機械で 100 個の菓子を試験的に製造したところ，それらの菓子の重さの標本平均は 50.10 g であった。このとき，m に対する信頼度 95 % の信頼区間は

$$50.\boxed{\text{トナ}} \leqq m \leqq 50.\boxed{\text{ニヌ}}$$

となる。

平均 m に対する信頼区間 $A \leqq m \leqq B$ において，$B - A$ をこの信頼区間の幅とよぶ。信頼度と標準偏差 σ は変わらないものとして，上で求めた信頼区間の幅を半分にするには，標本の大きさを $\boxed{\text{ネ}}$ にすればよい。$\boxed{\text{ネ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～⑤のうちから一つ選べ。

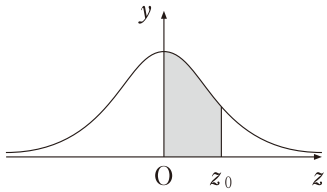
⓪　25　　①　50　　②　150

③　200　　④　300　　⑤　400

（数学Ⅱ・数学B第5問は次ページに続く。）

正　規　分　布　表

次の表は，標準正規分布の分布曲線における右図の灰色部分の面積の値をまとめたものである。



z_0	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990