数学Ｉ・数学Ａ

問　題	選　択　方　法
第１問	必　　　答
第２問	必　　　答
第３問	いずれか２問を選択し，解答しなさい。
第４問	
第５問	

第１問　（必答問題）（配点　30）

〔1〕　$\alpha = \dfrac{4}{4-\sqrt{7}}$ とする。α の分母を有理化すると

$$\alpha = \frac{\boxed{\text{アイ}} + \boxed{\text{ウ}}\sqrt{\boxed{\text{エ}}}}{\boxed{\text{オ}}}$$

となる。

また，r を有理数とし

$$\beta = \frac{9-(r^2-3r)\sqrt{7}}{5}$$

とする。

(1)　一般に，$\sqrt{7}$ が無理数であることから，有理数 p，q に対して

$$p + q\sqrt{7} = 0 \iff p = q = \boxed{\text{カ}}$$

が成り立つ。

(2)　$\alpha - \beta$ が有理数ならば，r は

$$\frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{オ}}} + \frac{r^2-3r}{\boxed{\text{キ}}} = 0$$

を満たす。このとき

$$r = \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}} \quad \text{または} \quad r = \frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$$

である。ただし，$\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ と $\dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$ の解答の順序は問わない。

（数学Ⅰ・数学A第１問は次ページに続く。）

〔2〕 a を正の実数とする。このとき，実数 x に関する次の条件 p，q，r を考える。

$$p:\ |x-1| \leqq a, \quad q:\ |x| \leqq \frac{5}{2}, \quad r:\ x^2 - 2x \leqq a$$

(1) 次の $\boxed{\text{シ}}$，$\boxed{\text{ス}}$ に当てはまるものを，下の⓪～③のうちからそれぞれ一つ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

$a = 1$ のとき，p は q であるための $\boxed{\text{シ}}$。また，$a = 3$ のとき，p は q であるための $\boxed{\text{ス}}$。

⓪ 必要条件であるが，十分条件ではない
① 十分条件であるが，必要条件ではない
② 必要十分条件である
③ 必要条件でも十分条件でもない

(2) 命題「$p \Longrightarrow q$」が真となるような a の最大値は $\dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$ である。

また，命題「$q \Longrightarrow p$」が真となるような a の最小値は $\dfrac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}$ である。

(3) 命題「$r \Longrightarrow q$」が真となるような a の最大値は $\dfrac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}}$ である。

(数学Ⅰ・数学A第1問は次ページに続く。)

〔3〕 実数 a は2次不等式 $a^2 - 3 < a$ を満たすとする。このとき a のとり得る値の範囲は

$$\frac{\boxed{\text{ト}} - \sqrt{\boxed{\text{ナニ}}}}{\boxed{\text{ヌ}}} < a < \frac{\boxed{\text{ト}} + \sqrt{\boxed{\text{ナニ}}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$$

である。

x の2次関数

$$f(x) = -x^2 + 1$$

を考える。

$a^2 - 3 \leqq x \leqq a$ における関数 $y = f(x)$ の最大値が1であるような a の値の範囲は

$$\boxed{\text{ネ}} \leqq a \leqq \sqrt{\boxed{\text{ノ}}}$$

である。

また，$a^2 - 3 \leqq x \leqq a$ における関数 $y = f(x)$ の最大値が1で，最小値が $f(a)$ であるような a の値の範囲は

$$\frac{\boxed{\text{ハヒ}} + \sqrt{\boxed{\text{フヘ}}}}{\boxed{\text{ホ}}} \leqq a \leqq \sqrt{\boxed{\text{ノ}}}$$

である。

第2問 (必答問題) (配点 30)

〔1〕 △ABCはAB = 4，BC = $10\sqrt{3}$，AC = 14を満たす。

(1) $\cos\angle B = \dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ア}}}}{\boxed{\text{イ}}}$ である。辺BC上に点Dを取り，△ABDの外接円の半径をRとするとき，$\dfrac{\mathrm{AD}}{R} = \boxed{\text{ウ}}$ であり，点Dを点Bから点Cまで移動させるとき，Rの最小値は $\boxed{\text{エ}}$ である。ただし，点Dは点Bとは異なる点とする。

(数学Ⅰ・数学A第2問は次ページに続く。)

⑵　△ABD の外接円の中心が辺 BC 上にあるとき，

$R = \dfrac{\boxed{\text{オ}}\sqrt{\boxed{\text{カ}}}}{\boxed{\text{キ}}}$ であり，△ACD の面積は $\dfrac{\boxed{\text{クケ}}\sqrt{\boxed{\text{コ}}}}{\boxed{\text{サ}}}$

である。

（数学Ⅰ・数学A第 2 問は次ページに続く。）

〔2〕 高校生のKさんは，ニュースで「為替レート（1米ドルは何円か）」および「日経平均株価」と呼ばれている数値が日々変化していることに興味をもったので，これらの数値を入手して調べてみることにした。

為替レートを100で割ったものをXとする。例えば，1米ドルが123円のときXは1.23となる。また，日経平均株価を10,000で割ったものをYとする。例えば，日経平均株価が16,500円のときYは1.65となる。

図1は，X，Yの日々の変化を描いたものである。ただし，土曜日，日曜日，祝日などデータのない日は除いている。全期間を次の二つの期間に分けて考察する。

期間A：2013年 1 月4日〜2014年11月28日(468日分のデータ)
期間B：2014年12月1日〜2016年 1 月29日(284日分のデータ)

図2は，期間Aと期間BにおけるX，Yのデータの散布図である。

（数学Ⅰ・数学A第2問は次ページに続く。）

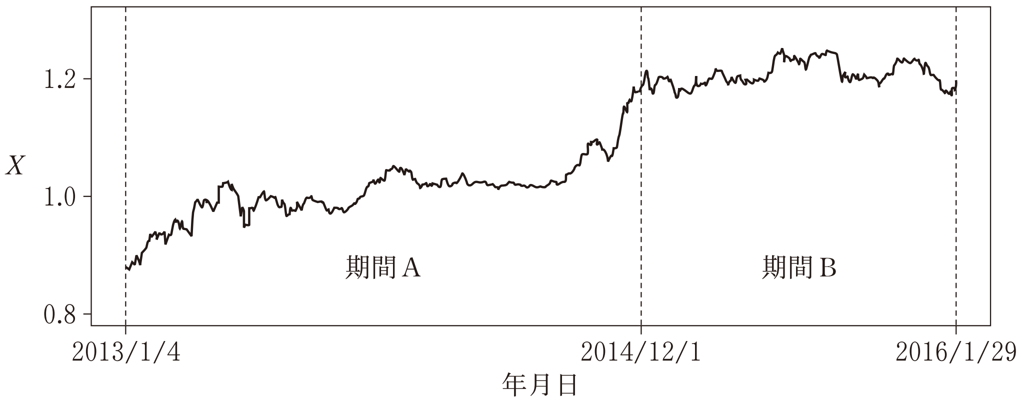

図1　X，Y の日々の変化

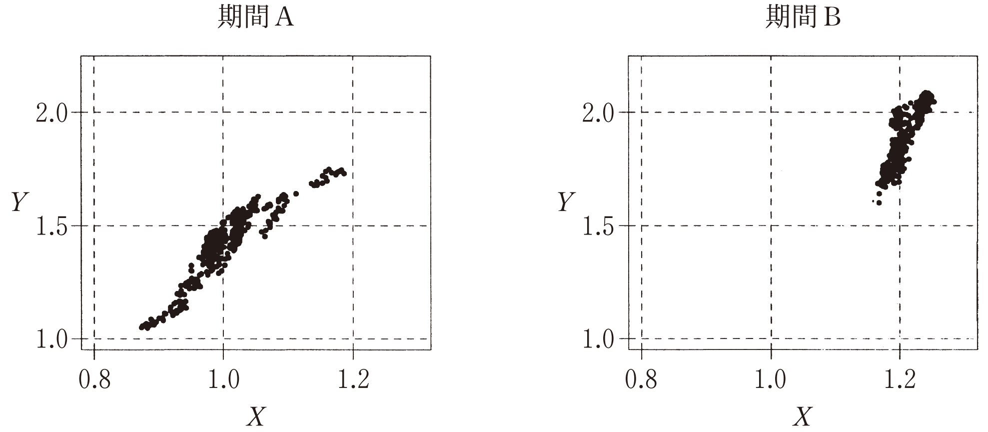

図2　X，Y のデータの散布図

（数学Ⅰ・数学A第2問は次ページに続く。）

(1) 表1は，X と Y について平均値，標準偏差および共分散を計算し，有効数字3桁で表したものである。ただし，X と Y の共分散とは，X の偏差と Y の偏差の積の平均値である。

表1　平均値，標準偏差および共分散

	期間A	期間B	全期間
X の平均値	1.01	1.21	1.08
Y の平均値	1.44	1.90	1.61
X の標準偏差	0.0522	0.0209	0.105
Y の標準偏差	0.144	0.118	0.260
X と Y の共分散	0.00685	0.00203	0.0263

次の $\boxed{\text{シ}}$ に当てはまるものを，下の⓪～⑤のうちから一つ選べ。

表1を用いて，期間A，期間Bにおける X と Y の相関係数を求め，小数第3位を四捨五入すると，それぞれ0.91と0.82である。全期間における X と Y の相関係数を r とすると $\boxed{\text{シ}}$ である。

⓪ $r \leqq 0$　① $0 < r < 0.82$　② $r = 0.82$

③ $0.82 < r < 0.91$　④ $r = 0.91$　⑤ $0.91 < r$

（数学Ⅰ・数学A第2問は34ページに続く。）

⑵ X のデータの t 番目の値を x_t とする。期間Aに対応するのは $t=1$，2，…，468 であり，期間Bに対応するのは $t=469$，470，…，752 である。X が日々どのように変化しているか調べるために，次の式によって定義される u_t を計算する。

$$u_t = \frac{x_{t+1} - x_t}{x_t} \times 100$$

ただし，期間Aの最終日($t=468$)と期間Bの最終日($t=752$)については u_t を計算しない。u_1，…，u_{467} および u_{469}，…，u_{751} を U のデータと呼ぶ。

図3および図4は，期間A，期間Bにおける U のデータのヒストグラムおよび箱ひげ図である。期間Aにおける中央値は 0.0584 であり，期間Bにおける中央値は 0.0252 であった。

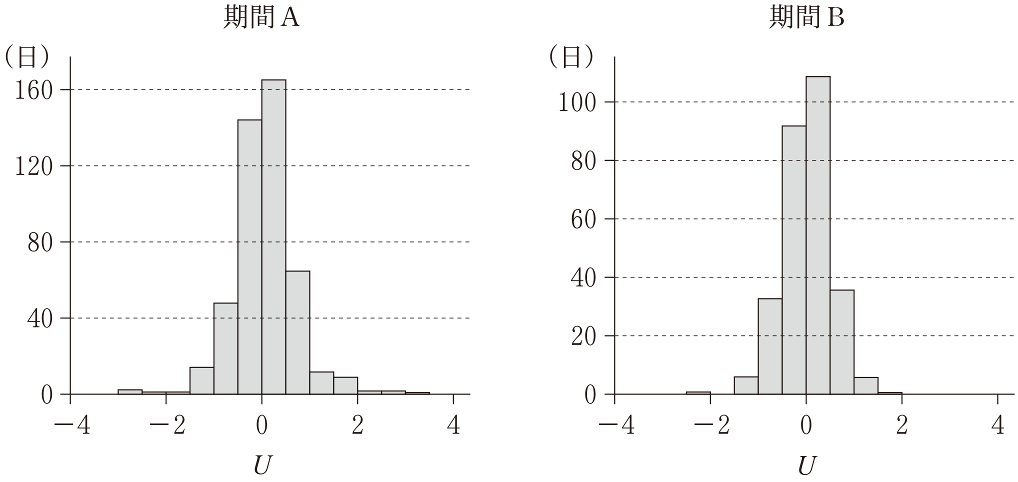

図3　U のデータのヒストグラム

(数学Ⅰ・数学A第2問は次ページに続く。)

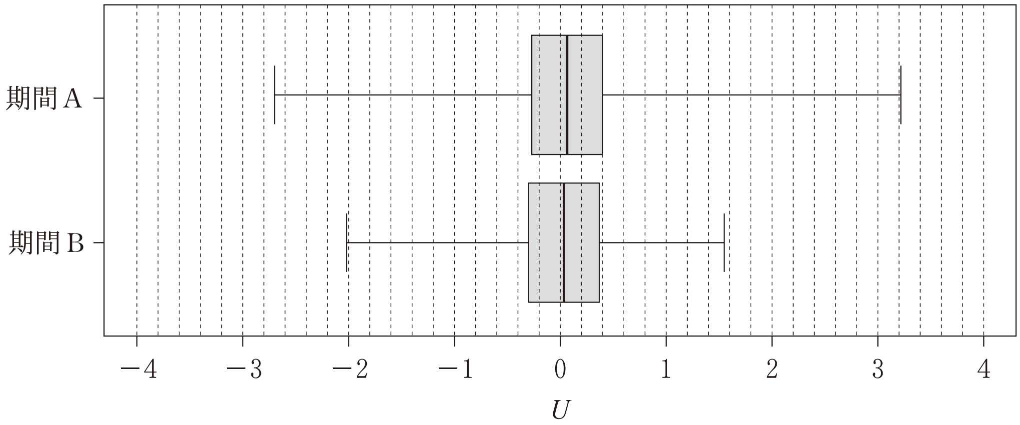

図4　U のデータの箱ひげ図

次の $\boxed{ス}$, $\boxed{セ}$ に当てはまるものを，下の⓪〜⑥のうちから一つずつ選べ。ただし，解答の順序は問わない。

図3および図4から U のデータについて読み取れることとして正しいものは，$\boxed{ス}$, $\boxed{セ}$ である。

⓪　期間Aにおける最大値は，期間Bにおける最大値より小さい。

①　期間Aにおける第1四分位数は，期間Bにおける第1四分位数より小さい。

②　期間Aにおける四分位範囲と期間Bにおける四分位範囲の差は0.2より大きい。

③　期間Aにおける範囲は，期間Bにおける範囲より小さい。

④　期間A，期間Bの両方において，四分位範囲は中央値の絶対値の8倍より大きい。

⑤　期間Aにおいて，第3四分位数は度数が最大の階級に入っている。

⑥　期間Bにおいて，第1四分位数は度数が最大の階級に入っている。

（数学Ⅰ・数学A第2問は次ページに続く。）

(3) X, Y から X', Y' を次の式によって定義する。

$$X' = aX + b, \quad Y' = cY + d$$

ただし，a, b, c, d は定数であり，$a \neq 0$ かつ $c \neq 0$ とする。

次の $\boxed{ソ}$ に当てはまるものを，下の⓪～⑧のうちから一つ選べ。

X' と Y' の相関係数は，X と Y の相関係数の $\boxed{ソ}$ 倍である。

⓪ 1　① a　② a^2

③ ac　④ $\dfrac{ac}{|ac|}$　⑤ b

⑥ b^2　⑦ bd　⑧ $|bd|$

(数学Ⅰ・数学A第2問は38ページに続く。)

(4)　次ページの図5の三つの散布図について考える。散布図1で表される V と W の2種類のデータの相関係数，散布図2で表される V' と W' の2種類のデータの相関係数，および散布図3で表される V'' と W'' の2種類のデータの相関係数をそれぞれ r_1，r_2 および r_3 とする。これらは，小数第3位を四捨五入して小数第2位まで求めると，-0.76，0.10，0.98 のいずれかであることがわかっている。

次の [タ] に当てはまるものを，下の⓪～⑤のうちから一つ選べ。

r_1，r_2 および r_3 の値の組合せとして正しいものは $\boxed{タ}$ である。

	⓪	①	②	③	④	⑤
r_1	-0.76	-0.76	0.10	0.10	0.98	0.98
r_2	0.10	0.98	-0.76	0.98	-0.76	0.10
r_3	0.98	0.10	0.98	-0.76	0.10	-0.76

(数学Ⅰ・数学A第2問は次ページに続く。)

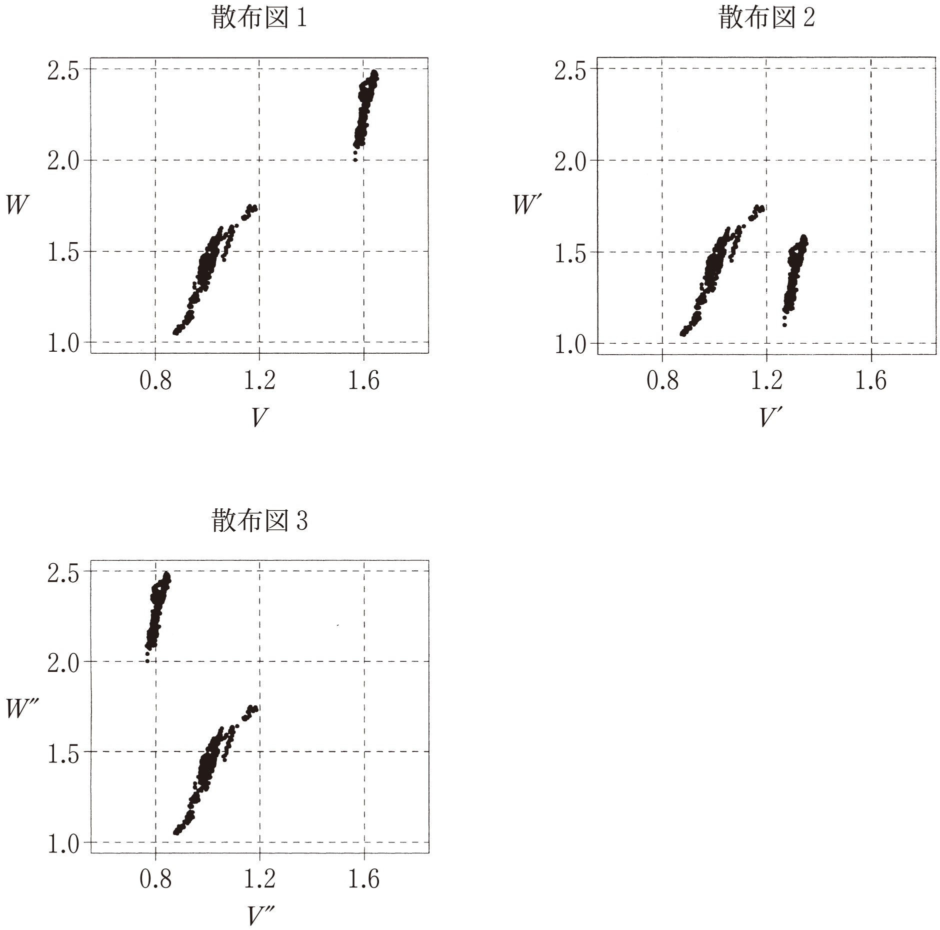
散布図 1
2.5
2.0
1.5
1.0
W
0.8
1.2
1.6
V
散布図 2
2.5
2.0
1.5
1.0
W′
0.8
1.2
1.6
V′
散布図 3
2.5
2.0
1.5
1.0
W″
0.8
1.2
1.6
V″

図 5　三つの散布図

第3問 （選択問題）（配点　20）

数字1が書かれたカードが4枚，数字2が書かれたカードが2枚，数字5が書かれたカードが2枚，合計8枚のカードがある。

(1)　8枚のカードを一列に並べて8桁の整数をつくる。

このときできる8桁の整数の個数は全部で $\boxed{\text{アイウ}}$ 個である。さらに，次の条件(＊)が満たされるときにできる8桁の整数を考える。

(＊)　数字1が書かれた4枚のカードのどの2枚のカードも隣り合わない。

この条件(＊)は，例えば，$\boxed{1}\boxed{2}\boxed{1}\boxed{5}\boxed{1}\boxed{2}\boxed{1}\boxed{5}$ のとき満たされる。条件(＊)が満たされるときにできる8桁の整数の個数は全部で $\boxed{\text{エオ}}$ 個である。

(2)　一般に，事象 A の確率を $P(A)$ で表す。また，二つの事象 A，B の積事象を $A \cap B$ と表す。

8枚のカードからでたらめに3枚を取り出して袋に入れるという試行を T_1 とし，さらに，その3枚のカードが入った袋からでたらめに1枚のカードを取り出すという試行を T_2 とする。

試行 T_1 において，袋の中の数字5が書かれたカードの枚数が0枚である事象を A_0，1枚である事象を A_1，2枚である事象を A_2 とすると

$$P(A_0) = \frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キク}}}, \quad P(A_1) = \frac{\boxed{\text{ケコ}}}{\boxed{\text{サシ}}}, \quad P(A_2) = \frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セソ}}}$$

である。

（数学Ⅰ・数学A第3問は次ページに続く。）

試行 T_2 において数字 5 が書かれたカードが取り出されるという事象を B とすると

$$P(A_1 \cap B) = \frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チツ}}}, \qquad P(A_2 \cap B) = \frac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{トナ}}}$$

である。

以上のことから，試行 T_2 において数字 5 が書かれたカードが取り出されたとき，袋の中にもう 1 枚の数字 5 が書かれたカードが入っている条件付き確率は $\dfrac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$ である。

第4問（選択問題）（配点　20）

〔1〕　不定方程式

$$23x - 31y = 2$$

の解となる自然数 x，y の組で，x が最小になるのは

$$x = \boxed{アイ},\quad y = \boxed{ウエ}$$

である。

$n = 31 \times \boxed{ウエ}$ とする。自然数 n^3 を 23 で割ると余りは $\boxed{オカ}$ である。

（数学Ⅰ・数学A第4問は次ページに続く。）

〔2〕

(1) 10 進法の分数 $\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{9}$ を 10 進法の小数で表すと循環小数 $0.\dot{5}$ となり，3 進法の小数で表すと有限小数 $0.\boxed{\text{クケ}}_{(3)}$ となる。

(2) ある有理数 x を 2 進法で表すと循環小数 $0.\dot{1}\dot{0}_{(2)}$ となった。このとき，$4x$ を 2 進法で表すと $\boxed{\text{コサ}}.\dot{1}\dot{0}_{(2)}$ となる。2 進法の $\boxed{\text{コサ}}_{(2)}$ を 10 進法で表すと $\boxed{\text{シ}}$ となるので，$4x-x$ を 10 進法で表すと $\boxed{\text{シ}}$ となる。したがって，x を 10 進法の分数で表すと $\dfrac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}$ となる。

(3) 3 進法で表すと小数第 3 位までで終わる有理数 x のうち，$x^2 < \dfrac{1}{7}$ を満たす最大の x を 3 進法で表すと $0.\boxed{\text{ソタチ}}_{(3)}$ となる。

第5問 （選択問題）（配点　20）

〔1〕 円に内接する四角形ABCDの辺ABの端点Aの側の延長と辺CDの端点Dの側の延長が点Pで交わるとする。さらに，PA $= x$，PB $= \sqrt{10}$ および PD $= 1$ とする。このとき

$$\mathrm{CD} = \sqrt{\boxed{\text{アイ}}}\,x - \boxed{\text{ウ}}$$

である。

対角線ACとBDの交点をQ，直線PQと辺BCの交点をRとし

$$\frac{\mathrm{RC}}{\mathrm{BR}} = 2$$

とする。このとき

$$x = \frac{\boxed{\text{エ}}\sqrt{\boxed{\text{オカ}}}}{\boxed{\text{キ}}}$$

である。

（数学Ⅰ・数学A第5問は次ページに続く。）

〔2〕 一般の凸多面体(へこみのない多面体)の頂点の数 v, 辺の数 e, 面の数 f について $v - e + f$ の値を考える。例えば, 立方体の場合で考えると, この値は $\boxed{\text{ク}}$ である。

以下では $v : e = 2 : 5$ かつ $f = 38$ であるような凸多面体について考える。オイラーの多面体定理により $v - e + f = \boxed{\text{ク}}$ であることがわかるので, $v = \boxed{\text{ケコ}}$, $e = \boxed{\text{サシ}}$ である。

さらに, この凸多面体は x 個の正三角形の面と y 個の正方形の面で構成されていて, 各頂点に集まる辺の数はすべて同じ ℓ であるとする。このとき $3x + 4y = \boxed{\text{スセソ}}$ であることから $x = \boxed{\text{タチ}}$ であり, さらに $\ell = \boxed{\text{ツ}}$ である。