数学Ⅱ・数学B

問　題	選　択　方　法
第1問	必　　答
第2問	必　　答
第3問	いずれか2問を選択し，解答しなさい。
第4問	
第5問	

第1問 (必答問題) (配点　30)

〔1〕 $0 \leqq \alpha \leqq \dfrac{\pi}{2}$，$0 \leqq \beta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ および関係式

$$2\cos^2(\beta - \alpha) = 3\sin(\beta - \alpha) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

を満たす α，β に対して，$y = 4\sin^2\beta - 4\cos^2\alpha$ とおく。

(1) $t = \sin(\beta - \alpha)$ とおくと，① から $t = \dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ であることがわかる。

$0 \leqq \alpha \leqq \dfrac{\pi}{2}$，$0 \leqq \beta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ であるから，$\beta - \alpha = \dfrac{\pi}{\boxed{\text{ウ}}}$ である。

(数学Ⅱ・数学B第1問は次ページに続く。)

(2) (1)により $\beta = \alpha + \dfrac{\pi}{\boxed{\text{ウ}}}$ であるから，加法定理を用いて，y を α で表すと

$$y = \boxed{\text{エ}} - \boxed{\text{オ}}\cos^2\alpha + \boxed{\text{カ}}\sqrt{\boxed{\text{キ}}}\sin\alpha\cos\alpha \quad \cdots \text{②}$$

となる。このことから，$y = \boxed{\text{エ}}$ となるのは，$\alpha = \dfrac{\pi}{\boxed{\text{ク}}}$，$\beta = \dfrac{\pi}{\boxed{\text{ケ}}}$ のときである。

(3) 2倍角の公式を用いると，② は

$$y = \sqrt{\boxed{\text{コ}}}\sin 2\alpha - \boxed{\text{サ}}\cos 2\alpha$$

となる。さらに，三角関数の合成を用いると

$$y = \boxed{\text{シ}}\sqrt{\boxed{\text{ス}}}\sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{\boxed{\text{セ}}}\right)$$

と変形できる。このことから，$y = -\sqrt{3}$ となるのは，$\alpha = \dfrac{\pi}{\boxed{\text{ソタ}}}$，$\beta = \dfrac{\pi}{\boxed{\text{チ}}}$ のときである。

(数学Ⅱ・数学B第1問は次ページに続く。)

〔2〕 p，q，x，y は実数とし，関係式

$$p = \log_3\left\{3^x - \left(\frac{1}{3}\right)^x\right\},\qquad q = \log_3\left\{3^y - \left(\frac{1}{3}\right)^y\right\}$$

を満たすとする。

(1) 真数の条件により，$x >$ $\boxed{\text{ツ}}$，$y >$ $\boxed{\text{ツ}}$ である。ただし，対数 $\log_a b$ に対し，a を底といい，b を真数という。

また，$x < y$ であるとき

$$3^x \boxed{\text{テ}}\ 3^y,\qquad \left(\frac{1}{3}\right)^x \boxed{\text{ト}} \left(\frac{1}{3}\right)^y,\qquad p \boxed{\text{ナ}}\ q$$

が成り立つ。$\boxed{\text{テ}}$，$\boxed{\text{ト}}$，$\boxed{\text{ナ}}$ に当てはまるものを，次の⓪〜②のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

⓪ $<$　　① $=$　　② $>$

（数学Ⅱ・数学B第1問は次ページに続く。）

(2) $x = \log_3 4$ のとき，$p = \log_3 \boxed{\text{ニ}} - \boxed{\text{ヌ}} \log_3 2 + \boxed{\text{ネ}}$ である。また，$p = \log_3 4$ のとき，$x = \log_3\left(\boxed{\text{ノ}} + \sqrt{\boxed{\text{ハ}}}\right)$ である。

(3) 関係式 $y = 2^x - 1$，$q = 2^p - 1$ が成り立つとき，$x = \dfrac{\log_3 \boxed{\text{ヒ}}}{\boxed{\text{フ}}}$ である。

第2問 （必答問題）（配点　30）

関数 $f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x - 4$ について考える。

(1) 関数 $f(x)$ の増減を調べよう。$f(x)$ の導関数は

$$f'(x) = \boxed{\text{ア}}\,x^2 - \boxed{\text{イウ}}\,x + \boxed{\text{エ}}$$

であり，$f(x)$ は $x = \dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ で極大値，$x = \boxed{\text{キ}}$ で極小値をとる。よって，$x \geqq 0$ の範囲における $f(x)$ の最小値は $\boxed{\text{クケコ}}$ である。

また，方程式 $f(x) = 0$ の異なる実数解の個数は $\boxed{\text{サ}}$ 個である。

(2) 曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(0,\ f(0))$ における接線を ℓ とすると，ℓ の方程式は $y = \boxed{\text{シ}}\,x - \boxed{\text{ス}}$ である。また，放物線 $y = x^2 + px + q$ を C とし，C は点 $\left(a,\ \boxed{\text{シ}}\,a - \boxed{\text{ス}}\right)$ で ℓ と接しているとする。このとき，p，q は a を用いて

$$p = \boxed{\text{セソ}}\,a + \boxed{\text{タ}}, \quad q = a^{\boxed{\text{チ}}} - \boxed{\text{ツ}}$$

と表される。

（数学Ⅱ・数学B第2問は次ページに続く。）

(3) (2)の放物線 C は，$0 \leqq x \leqq 1$ の範囲では，x 軸とただ1点 $(\beta,\ 0)$ で交わり，$0 < \beta < 1$ であるとする。このとき，$g(x) = x^2 + px + q$ とおけば

$$g(0)g(1) = a\left(a + \boxed{\text{テ}}\right)\left(a - \boxed{\text{ト}}\right)^2 < 0$$

である。$\left(a - \boxed{\text{ト}}\right)^2$ は負にならないので，a の値の範囲は

$\boxed{\text{ナニ}} < a < \boxed{\text{ヌ}}$ であり，$g(0)\ \boxed{\text{ネ}}\ 0$，$g(1)\ \boxed{\text{ノ}}\ 0$ である。ただし，$\boxed{\text{ネ}}$ と $\boxed{\text{ノ}}$ については，当てはまるものを，次の⓪～②のうちから一つずつ選べ。同じものを選んでもよい。

⓪ $<$　　① $=$　　② $>$

放物線 C の $0 \leqq x \leqq \beta$ の部分と，x 軸および y 軸で囲まれた図形の面積を S とする。また，C の $\beta \leqq x \leqq 1$ の部分と，x 軸および直線 $x = 1$ で囲まれた図形の面積を T とする。このとき，a の値によらず，$\displaystyle\int_0^1 g(x)\,dx = \boxed{\text{ハ}}$ が成り立つ。$\boxed{\text{ハ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～⑦のうちから一つ選べ。

⓪ $S + T$　　① $\dfrac{S + T}{2}$　　② $2S + T$　　③ $2T + S$

④ $S - T$　　⑤ $T - S$　　⑥ $2S - T$　　⑦ $2T - S$

したがって，$S = T$ となる a の値を求めると，$a = \dfrac{\boxed{\text{ヒ}} - \sqrt{\boxed{\text{フヘ}}}}{\boxed{\text{ホ}}}$ である。

第3問　（選択問題）（配点　20）

次の(I)，(II)で定められる数列$\{a_n\}$を考える。

(I)　$a_1 = 1$，$a_2 = 4$

(II)　$n = 1, 2, 3, \cdots$に対して

$$(n+1)a_{n+2} - (3n+2)a_{n+1} + 2na_n = 4n + 2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

である。

(1)　$a_3 = \boxed{\text{アイ}}$ である。

(2)　$\{a_n\}$の一般項，および初項から第n項までの和S_nを求めよう。

①の左辺は

$$(n+1)a_{n+2} - (3n+2)a_{n+1} + 2na_n$$

$$= (n+1)\left(a_{n+2} - \boxed{\text{ウ}}\,a_{n+1}\right) - n\left(a_{n+1} - \boxed{\text{ウ}}\,a_n\right)$$

となる。よって

$$(n+1)\left(a_{n+2} - \boxed{\text{ウ}}\,a_{n+1}\right) - n\left(a_{n+1} - \boxed{\text{ウ}}\,a_n\right) = 4n + 2$$

である。したがって，$b_n = n\left(a_{n+1} - \boxed{\text{ウ}}\,a_n\right)$とおくと，$\{b_n\}$の階差数列は初項 $\boxed{\text{エ}}$，公差 $\boxed{\text{オ}}$ の等差数列であり，$\{b_n\}$の一般項は$b_n = \boxed{\text{カ}}\,n^{\boxed{\text{キ}}}$ である。ゆえに

$$a_{n+1} - \boxed{\text{ウ}}\,a_n = \frac{1}{n} \cdot \boxed{\text{カ}}\,n^{\boxed{\text{キ}}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

を得る。

（数学Ⅱ・数学B第3問は次ページに続く。）

$c_n = a_{n+1} - a_n$ とおくと，②から，$c_{n+1} - \boxed{\text{ウ}}\, c_n = \boxed{\text{ク}}$ である。$c_{n+1} + \boxed{\text{ケ}} = \boxed{\text{ウ}}\left(c_n + \boxed{\text{ケ}}\right)$ により，数列 $\left\{c_n + \boxed{\text{ケ}}\right\}$ は初項 $\boxed{\text{コ}}$，公比 $\boxed{\text{ウ}}$ の等比数列である。

したがって，$\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = \boxed{\text{サ}} \cdot \boxed{\text{シ}}^{\boxed{\text{ス}}} - \boxed{\text{セ}}\, n - \boxed{\text{ソ}}$$

である。ただし，$\boxed{\text{ス}}$ については，当てはまるものを，次の⓪～④のうちから一つ選べ。

⓪ $n-2$　① $n-1$　② n　③ $n+1$　④ $n+2$

また，$\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n は

$$S_n = \boxed{\text{タ}} \cdot \boxed{\text{チ}}^{\boxed{\text{ツ}}} - n^2 - \boxed{\text{テ}}\, n - \boxed{\text{ト}}$$

である。ただし，$\boxed{\text{ツ}}$ については，当てはまるものを，次の⓪～④のうちから一つ選べ。

⓪ $n-2$　① $n-1$　② n　③ $n+1$　④ $n+2$

第4問　(選択問題)（配点　20）

座標空間において4点A(2, 0, 0)，B(1, 1, 0)，C(1, 0, 1)，D(x, y, z)を考える。

(1) 三つのベクトル$\overrightarrow{DA}$，$\overrightarrow{DB}$，$\overrightarrow{DC}$について

$$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}=\boxed{ア} \quad \cdots\cdots ①$$

$$\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DA}=\boxed{イ} \quad \cdots\cdots ②$$

である。$\boxed{ア}$，$\boxed{イ}$に当てはまるものを，次の⓪～⑧のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを選んでもよい。

⓪ $x-y-1$　① $y-z-1$　② $z-x-1$
③ $x-y$　④ $y-z$　⑤ $z-x$
⑥ $x-y+1$　⑦ $y-z+1$　⑧ $z-x+1$

(2) $AB=BC=CA=\sqrt{\boxed{ウ}}$により，三角形ABCは正三角形である。以下，4点A，B，C，Dが，正四面体の四つの頂点になるとする。このときのx，y，zの値を求めよう。ただし，$x>1$とする。

ベクトル$\overrightarrow{DA}$，$\overrightarrow{DB}$，$\overrightarrow{DC}$の大きさは，いずれも$\sqrt{\boxed{エ}}$であり，どの二つのベクトルのなす角も$\boxed{オカ}$°である。よって，$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DA}=\boxed{キ}$となる。このことと①，②および$|\overrightarrow{DA}|=|\overrightarrow{DB}|=|\overrightarrow{DC}|=\sqrt{\boxed{エ}}$により，$(x, y, z)=\left(\boxed{ク}, \boxed{ケ}, \boxed{コ}\right)$となる。

（数学Ⅱ・数学B第4問は次ページに続く。）

(3) $(x,\ y,\ z) = \left(\boxed{\text{ク}},\ \boxed{\text{ケ}},\ \boxed{\text{コ}}\right)$のときを考える。線分ABの中点をP，線分DAを1：2に内分する点をQ，線分DCを$t:(1-t)$ $(0<t<1)$に内分する点をRとする。三角形PQRの面積Sが最小になるときのtの値を求めよう。

$$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2 = \frac{\boxed{\text{サシ}}}{\boxed{\text{スセ}}}, \qquad |\overrightarrow{\mathrm{PR}}|^2 = \boxed{\text{ソ}}\,t^2 - \boxed{\text{タ}}\,t + \frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$$

であり，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$と$\overrightarrow{\mathrm{PR}}$のなす角を$\theta$とすると，$S = \dfrac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}||\overrightarrow{\mathrm{PR}}|\sin\theta$なので

$$\begin{aligned} 4S^2 &= |\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|^2\sin^2\theta \\ &= |\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|^2 - |\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|^2\cos^2\theta \\ &= t^2 - \frac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}\,t + \frac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニヌ}}} \end{aligned}$$

である。よって，Sは$t = \dfrac{\boxed{\text{ネ}}}{\boxed{\text{ノハ}}}$のとき最小になる。

第5問 （選択問題）（配点　20）

$0 < p < 1$ とする。袋の中に白球が p，赤球が $1-p$ の割合で，全部で m 個入っているものとする。

以下の問題を解答するにあたっては，必要に応じて29ページの正規分布表を用いてもよい。

(1) $p = \dfrac{3}{5}$ とする。この袋の中から1個の球を取り出し袋の中へ戻すという試行を4回繰り返すとき，白球の出る回数を表す確率変数を W とする。W の平均（期待値）は $\dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$，$W$ の分散は $\dfrac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カキ}}}$ である。

さらに

$$X = (\text{白球の出る回数}) - (\text{赤球の出る回数})$$

とするとき

$$X = \boxed{\text{ク}}\,W - \boxed{\text{ケ}}$$

が成り立つ。このことを利用して，X の平均は $\dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$，$X$ の分散は $\dfrac{\boxed{\text{シス}}}{\boxed{\text{セソ}}}$ であることがわかる。

（数学Ⅱ・数学B第5問は次ページに続く。）

(2)　$m = 10$，$p = \dfrac{3}{5}$ とする。この袋の中から同時に4個の球を取り出すとき，白球の個数を表す確率変数を Y とする。このとき

$$P(Y = 0) = \frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チツテ}}}, \quad P(Y = 1) = \frac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナニ}}}$$

である。同様に Y のとり得る他の値に対する確率を求めてから，Y の平均を計算すると $\dfrac{\boxed{\text{ヌネ}}}{\boxed{\text{ノ}}}$ であることがわかる。

（数学Ⅱ・数学B第5問は次ページに続く。）

(3) 以下では，p の値がわからないとする。

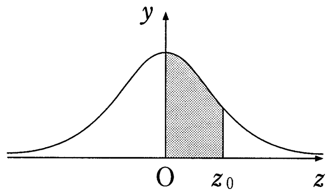
この袋の中から1個の球を取り出し袋の中へ戻すという試行を n 回繰り返す(以下，これを n 回の復元抽出という)。n 回の復元抽出を行ったとき，白球の出る回数を確率変数 W で表し，$R = \dfrac{W}{n}$ とおく。n が十分大きいとき，確率変数 R は近似的に平均 p，分散 $\dfrac{p(1-p)}{n}$ の正規分布に従う。W のとる値を w とし，$r = \dfrac{w}{n}$ とおくと，R が近似的に従う正規分布の分散 $\dfrac{p(1-p)}{n}$ を $\dfrac{r(1-r)}{n}$ で置き換えることにより，p に対する信頼度(信頼係数)95 % の信頼区間 $A \leqq p \leqq B$ を求めることができる。このとき，$B - A$ を信頼区間の幅とよぶ。以下，信頼度 95 % を固定して考え，n は十分に大きいとする。

n 回の復元抽出を行って信頼区間を作るとき，信頼区間の幅が最大となる r の値は $r = 0.$ $\boxed{\text{ハ}}$ が得られたときである。このときの信頼区間の幅を L_1 とする。また，n 回の復元抽出を行って，$r = 0.8$ が得られたときの信頼区間の幅を L_2 とする。このとき，$\dfrac{L_2}{L_1} = \boxed{\text{ヒ}}.\boxed{\text{フ}}$ である。

(数学Ⅱ・数学B第5問は次ページに続く。)

正 規 分 布 表

次の表は，標準正規分布の分布曲線における右図の灰色部分の面積の値をまとめたものである。



z_0	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990