数学Ⅱ・数学Ｂ

問　題	選　択　方　法
第１問	必　　答
第２問	必　　答
第３問	いずれか２問を選択し，解答しなさい。
第４問	
第５問	
第６問	

数学Ⅱ・数学B　（注）この科目には，選択問題があります。（15ページ参照。）

第1問　（必答問題）（配点　30）

〔1〕 不等式

$$\log_3(x^2-2x)<1 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

を満たす x に対して

$$u=\log_2(2x^2+2x+1)$$

とおく。u の値が整数となる x と，そのときの u の値を求めよう。

真数は正であることに注意して，不等式 ① を満たす x のとり得る値の範囲を求めると

$$-\boxed{\text{ア}}<x<\boxed{\text{イ}},\quad \boxed{\text{ウ}}<x<\boxed{\text{エ}}$$

となる。ただし，対数 $\log_a b$ に対し，a を底といい，b を真数という。

（数学Ⅱ・数学B第1問は次ページに続く。）

$\boxed{\text{ウ}} < x < \boxed{\text{エ}}$ のとき，$2x^2+2x+1$ のとり得る値の範囲を考えると，u の値が整数となるのは

$$2x^2+2x+1=\boxed{\text{オカ}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

となる場合であり，このとき，$u=\boxed{\text{キ}}$ である。また，$\boxed{\text{ウ}} < x < \boxed{\text{エ}}$ を満たす方程式 ② の解は

$$x=\frac{-1+\sqrt{\boxed{\text{クケ}}}}{2}$$

である。

同様に，$-\boxed{\text{ア}} < x < \boxed{\text{イ}}$ のとき，u の値が整数となるのは

$$2x^2+2x+1=\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

となる場合であり，このとき，$u=\boxed{\text{シス}}$ である。また，$-\boxed{\text{ア}} < x < \boxed{\text{イ}}$ を満たす方程式 ③ の解は

$$x=\frac{\boxed{\text{セソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$$

である。

(数学Ⅱ・数学B第1問は次ページに続く。)

〔2〕 関数

$$f(x)=x^2+4\left(\frac{3\tan\theta}{1+\tan^2\theta}-\sqrt{3}\right)x+3\left(\sin^2\theta+3\cos^2\theta\right)^2$$

について，すべての実数xに対して$f(x)>0$が成り立つようなθの値の範囲を求めよう。ただし，$-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$とする。

不等式$f(x)>0$がすべての実数xに対して成り立つための条件は，2次方程式$f(x)=0$の判別式DがD $\boxed{\text{チ}}$ 0を満たすことである。$\boxed{\text{チ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～②のうちから一つ選べ。

⓪ $<$　　① $=$　　② $>$

2倍角の公式により

$$\sin^2\theta+3\cos^2\theta=\boxed{\text{ツ}}+\cos 2\theta$$

$$\frac{3\tan\theta}{1+\tan^2\theta}=\frac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}\sin 2\theta$$

であるから，判別式Dは

$$D=12\left(\sqrt{\boxed{\text{ナ}}}\sin 2\theta+\cos 2\theta\right)\left(\sqrt{\boxed{\text{ナ}}}\sin 2\theta-\cos 2\theta-\boxed{\text{ニ}}\right)$$

と表すことができる。

(数学Ⅱ・数学B第1問は次ページに続く。)

ここで

$$\sqrt{\boxed{\text{ナ}}}\sin 2\theta - \cos 2\theta - \boxed{\text{ニ}}\ \boxed{\text{ヌ}}\ 0$$

である。$\boxed{\text{ヌ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～②のうちから一つ選べ。

⓪ $<$　　① $=$　　② $>$

また

$$\sqrt{\boxed{\text{ナ}}}\sin 2\theta + \cos 2\theta = \boxed{\text{ネ}}\sin\left(2\theta + \frac{\pi}{\boxed{\text{ノ}}}\right)$$

であるから，条件 D $\boxed{\text{チ}}$ 0 により，不等式 $f(x) > 0$ がすべての実数 x に対して成り立つような θ のとり得る値の範囲は

$$-\frac{\pi}{\boxed{\text{ハヒ}}} < \theta < \frac{\boxed{\text{フ}}}{\boxed{\text{ハヒ}}}\pi$$

であることがわかる。

第2問 (必答問題) (配点　30)

座標平面上で，放物線 $y = x^2 + 2x - 3$ を C とする。

C 上の点$(a,\ a^2 + 2a - 3)$における C の接線の方程式は

$$y = \left(\boxed{\text{アイ}} + \boxed{\text{ウ}}\right)x - a^{\boxed{\text{エ}}} - \boxed{\text{オ}}$$

である。特に，$a = 0$ のときの接線の方程式は

$$y = \boxed{\text{カ}}\,x - \boxed{\text{キ}} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{①}$$

となる。

実数 b，c は $b < 0 < c$ を満たすとする。放物線 C と接線①，および2直線 $x = b$，$x = c$ で囲まれた二つの部分の面積の和 S は

$$S = \frac{1}{\boxed{\text{ク}}}\left(\boxed{\text{ケ}}^{\boxed{\text{コ}}} - \boxed{\text{サ}}^{\boxed{\text{コ}}}\right)$$

である。

(数学Ⅱ・数学B第2問は次ページに続く。)

0以上の実数 t を用いて，b と c を

$$b=-|t-1|-4,\quad c=4t+1$$

とおくことにする。このとき，S を t を用いて表し，t の値が変化するときの S の最小値を求めよう。

$0 \leqq t \leqq 1$ のとき

$$S=\frac{1}{\boxed{\text{ク}}}\left\{\left(\boxed{\text{シ}}\,t+\boxed{\text{ス}}\right)^{\boxed{\text{コ}}}-\left(t-\boxed{\text{セ}}\right)^{\boxed{\text{コ}}}\right\}$$

となり，$t>1$ のとき

$$S=\frac{1}{\boxed{\text{ク}}}\left\{\left(\boxed{\text{シ}}\,t+\boxed{\text{ス}}\right)^{\boxed{\text{コ}}}+\left(t+\boxed{\text{ソ}}\right)^{\boxed{\text{コ}}}\right\}$$

となる。

$0 \leqq t \leqq 1$ のとき，S の増減を調べると，S は

$$t=\frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}$$

で最小値をもつことがわかる。

$t>1$ のとき，t の値が増加すると，S は $\boxed{\text{ツ}}$ することがわかる。$\boxed{\text{ツ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ。

⓪ 減少　　① 減少してから増加

② 増加　　③ 増加してから減少

以上により，$t \geqq 0$ における S の最小値は

$$\frac{\boxed{\text{テトナ}}}{\boxed{\text{ニ}}}$$

である。

数学Ⅱ・数学B　第3問～第6問は，いずれか2問を選択し，解答しなさい。

第3問 （選択問題）（配点　20）

$\{a_n\}$ を $a_2 = 162$ で公比が 3 の等比数列とする。この数列の一般項は

$$a_n = \boxed{\text{アイ}} \cdot \boxed{\text{ウ}}^{\,n-1}$$

である。$\{b_n\}$ を $b_1 = \dfrac{a_1}{2}$ と

$$b_{n+1} = 3b_n + a_n \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

で定められる数列とし，自然数 n に対して，$x_n = \dfrac{b_n}{3^n}$ とおく。① から $x_{n+1} = x_n + \boxed{\text{エ}}$ となるので，x_n を求めることにより $\{b_n\}$ の一般項が得られる。特に，$\dfrac{b_{10}}{3^{10}} = x_{10} = \boxed{\text{オカ}}$ である。

自然数 n に対して，$S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$ とおく。① から

$$S_{n+1} - \boxed{\text{キク}} = 3S_n + \sum_{k=1}^{n} a_k \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

である。したがって，$S_{n+1} = S_n + b_{n+1}$ に注意して計算すると S_n が得られる。特に，$\dfrac{S_{10}}{3^{10}} = \boxed{\text{ケコ}}$ である。

（数学Ⅱ・数学B第3問は次ページに続く。）

$\{c_n\}$ を $c_1 = 3$ と

$$c_{n+1} = 3c_n + b_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

で定められる数列とし，自然数 n に対して，$y_n = \dfrac{c_n}{3^n}$ とおく。② から

$y_{n+1} = y_n + \boxed{\text{サ}}\,n + \boxed{\text{シ}}$ となるので，y_n を求めることにより $\{c_n\}$ の一般項が得られる。特に，$\dfrac{c_{10}}{3^{10}} = y_{10} = \boxed{\text{スセソ}}$ である。

自然数 n に対して，$T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} c_k$ とおく。② から

$$T_{n+1} - \boxed{\text{タ}} = 3T_n + S_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

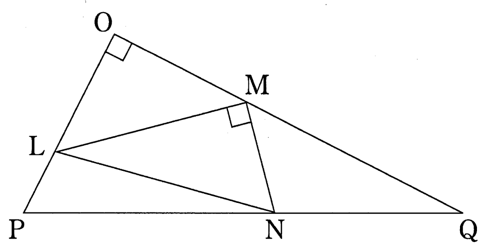
となるので

$$T_n = \frac{\left(n^2 - n + \boxed{\text{チ}}\right)\boxed{\text{ツ}}^{\,n+1} - \boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

である。

第4問 (選択問題)(配点 20)

OP＝1，OQ＝2，∠POQ＝90°である三角形OPQにおいて，線分OPを2：1に内分する点をL，線分OQをa：$(1-a)$に内分する点をMとする。ただし，$0<a<1$とする。さらに，線分PQ上に点Nを∠LMN＝90°となるようにとる。



$\overrightarrow{OP}=\vec{p}$，$\overrightarrow{OQ}=\vec{q}$とおき，PN：NQ＝$b$：$(1-b)$とする。

(1) $\overrightarrow{ML}$と$|\overrightarrow{ML}|$はaを用いて

$$\overrightarrow{ML}=\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\vec{p}-\boxed{\text{ウ}}\,\vec{q},\quad |\overrightarrow{ML}|=\frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}\sqrt{1+\boxed{\text{カ}}\,a^2}$$

と表される。

(2) $|\overrightarrow{MN}|$をaを用いて表そう。まず，$\overrightarrow{MN}$はa，bを用いて

$$\overrightarrow{MN}=\left(1-\boxed{\text{キ}}\right)\vec{p}+\left(\boxed{\text{ク}}-\boxed{\text{ケ}}\right)\vec{q}$$

と表される。$\overrightarrow{ML}\cdot\overrightarrow{MN}=\boxed{\text{コ}}$であるから，$b=\dfrac{1+\boxed{\text{サ}}\,a^2}{\boxed{\text{シ}}+\boxed{\text{ス}}\,a}$である。

(数学Ⅱ・数学B第4問は次ページに続く。)

したがって，$|\overrightarrow{\mathrm{MN}}|$ は a を用いて

$$|\overrightarrow{\mathrm{MN}}| = \frac{\boxed{\text{セ}}\left(\boxed{\text{ソ}} - a\right)}{\boxed{\text{シ}} + \boxed{\text{ス}}\,a}\sqrt{1 + \boxed{\text{タ}}\,a^2}$$

と表される。

(3) 三角形 LMN と三角形 QOP は相似であるとする。直線 OQ と直線 LN の交点を求めよう。

$|\overrightarrow{\mathrm{ML}}| = \boxed{\text{チ}}\,|\overrightarrow{\mathrm{MN}}|$ であるから，$a = \dfrac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テト}}}$，$b = \dfrac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニヌ}}}$ である。

s を実数とし，直線 LN 上に点 R を $\overrightarrow{\mathrm{LR}} = s\,\overrightarrow{\mathrm{LN}}$ となるようにとる。$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ は s を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \left(\frac{\boxed{\text{ネ}}}{\boxed{\text{ノ}}} - \frac{s}{\boxed{\text{ハ}}}\right)\vec{p} + \frac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニヌ}}}\,s\,\vec{q}$$

と表される。$s = \dfrac{\boxed{\text{ヒ}}}{\boxed{\text{フ}}}$ のとき，R は，直線 OQ 上の点でもあるので，直線 OQ と直線 LN の交点となる。

第5問　（選択問題）（配点　20）

次の表は，五つの教科について，好きな順に1から5の順位を同じ順位がないように，10人の生徒につけてもらった結果をまとめたものである。

	教科1	教科2	教科3	教科4	教科5
生徒1	4	3	1	2	5
生徒2	5	4	2	3	1
生徒3	1	3	5	4	2
生徒4	4	5	2	3	1
生徒5	3	2	4	1	5
生徒6	4	3	2	5	1
生徒7	1	4	5	3	2
生徒8	2	3	5	1	4
生徒9	1	5	2	3	4
生徒10	4	5	2	1	3
中央値	A	3.5	2.0	3.0	2.5
平均値	2.9	3.7	3.0	2.6	B
分　散	2.09	C	2.20	1.64	2.36

以下，小数の形で解答する場合，指定された桁(けた)数の一つ下の桁を四捨五入し，解答せよ。途中で割り切れた場合，指定された桁まで⓪にマークすること。

（数学Ⅱ・数学B第5問は次ページに続く。）

(1) 教科1について10人の順位の中央値Aは $\boxed{ア}$. $\boxed{イ}$, 教科5について10人の順位の平均値Bは $\boxed{ウ}$. $\boxed{エ}$ である。また，教科2について10人の順位の分散Cの値は $\boxed{オ}$. $\boxed{カキ}$ である。

(2) j, k を相異なる5以下の自然数とする。教科 j と教科 k に対して，教科 j の順位が教科 k の順位より上位である生徒の人数を変量 w で表す。まず，$j<k$ を満たす10通りの (j, k) について w をまとめると次の表になる。

(j, k)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(3, 4)	(3, 5)	(4, 5)
w	6	D	4	6	4	E	3	5	4	5

表中のD，Eの値はそれぞれ $\boxed{ク}$, $\boxed{ケ}$ である。また，$\alpha \neq \beta$ としたとき，$j=\alpha$, $k=\beta$ のときの w の値 w_1 と $j=\beta$, $k=\alpha$ のときの w の値 w_2 について，関係式 $\boxed{コ}$ が成り立つから，$j>k$ のときの w の値は上の表から求めることができる。$\boxed{コ}$ に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ。

⓪ $w_1=w_2$　① $w_1=-w_2$　② $w_1+w_2=10$　③ $w_1-w_2=10$

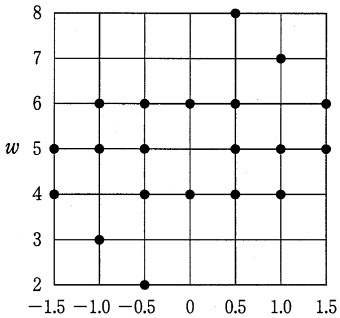
さらに，教科 j の中央値から教科 k の中央値を引いた差を変量 u，教科 j の平均値から教科 k の平均値を引いた差を変量 v で表す。たとえば，$j=2$, $k=3$ のとき $u=\boxed{サ}.\boxed{シ}$, $v=\boxed{ス}.\boxed{セ}$ であり，$j=2$, $k=4$ のとき $u=0.5$, $v=1.1$ である。

以上から，$j \neq k$ を満たす20通りの (j, k) について，u と w の相関図(散布図)は $\boxed{ソ}$，v と w の相関図は $\boxed{タ}$ となる。したがって，変量 u と変量 w の相関係数の値を r_1，変量 v と変量 w の相関係数の値を r_2 とするとき，$\boxed{チ}$ が成り立つ。

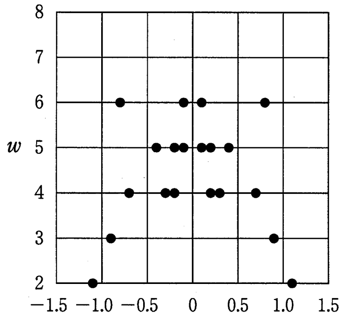
(数学Ⅱ・数学B第5問は次ページに続く。)

$\boxed{\text{ソ}}$, $\boxed{\text{タ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～⑤のうちから一つずつ選べ。ただし，以下の相関図では，横軸が変量 u あるいは変量 v を表している。

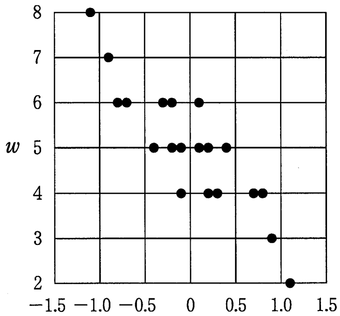
⓪



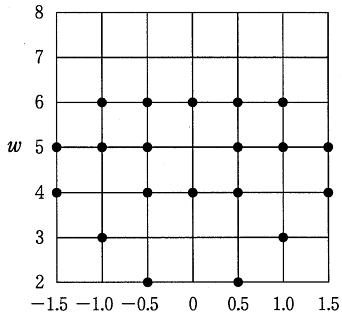
①



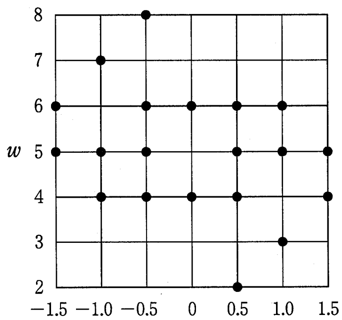
②



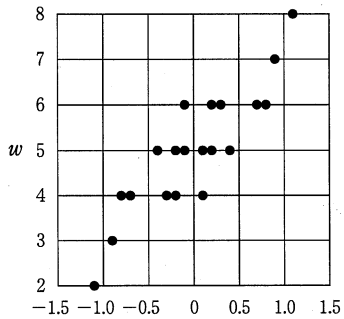
③



④



⑤



（数学Ⅱ・数学B第5問は次ページに続く。）

$\boxed{チ}$ に当てはまるものを，次の⓪～⑤のうちから一つ選べ。

⓪ $r_2 < 0 < r_1$　① $r_1 < 0 < r_2$　② $0 < r_2 < r_1$
③ $0 < r_1 < r_2$　④ $r_1 < r_2 < 0$　⑤ $r_2 < r_1 < 0$

(3) m，n を相異なる 10 以下の自然数とする。生徒 m がつけた順位を変量 x，生徒 n がつけた順位を変量 y とし，生徒 m が教科 k に対してつけた順位を x_k，生徒 n が教科 k に対してつけた順位を y_k で表す。変量 x，y の値はいずれも 1，2，3，4，5 を一つずつ含むから，変量 x の平均値 $\overline{x}$ と分散 ${s_x}^2$，および，変量 y の平均値 $\overline{y}$ と分散 ${s_y}^2$ は，すべて整数値になり

$$\overline{x} = \overline{y} = \boxed{ツ}, \quad {s_x}^2 = {s_y}^2 = \boxed{テ}$$

である。したがって

$$\sum_{k=1}^{5}(x_k - \overline{x})(y_k - \overline{y}) = \sum_{k=1}^{5} x_k y_k - \boxed{トナ}$$

であり，教科ごとの x，y の値の組 $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$，$(x_3,\ y_3)$，$(x_4,\ y_4)$，$(x_5,\ y_5)$ を考えるとき，x と y の相関係数 r について

$$r = \frac{1}{\boxed{ニヌ}}\left(\sum_{k=1}^{5} x_k y_k - \boxed{トナ}\right)$$

が成り立つ。特に，$m = 3$，$n = 6$ のとき，$r = \boxed{ネ}.\boxed{ノ}$ であり，$\boxed{ハ}$。$\boxed{ハ}$ に当てはまるものを，次の⓪～②のうちから一つ選べ。

⓪ 生徒 3 が上位の順位をつけた教科に生徒 6 も上位の順位をつけた傾向が認められる

① 生徒 3 が上位の順位をつけた教科に生徒 6 は下位の順位をつけた傾向が認められる

② 生徒 3 が上位の順位をつけた教科に生徒 6 も上位の順位をつけた傾向も，生徒 3 が上位の順位をつけた教科に生徒 6 は下位の順位をつけた傾向も認められない

第6問 （選択問題）（配点　20）

与えられた自然数 A，B，C について，条件

$$\begin{cases} x+y=A \\ z+w=B \\ x+z=C \end{cases}$$

を満たす0以上の整数 x，y，z，w をすべて求めたい。そのために，条件 $x+y=A$ により $x \leqq A$ であることに着目して，〔プログラム1〕を作成した。

〔プログラム1〕

```
100 INPUT A,B,C
110 FOR X=0 TO A
120   LET Y=A-X
130   LET Z=C-X
140   IF Z<0 THEN [ ア ]
150   LET W=[ イ ]
160   IF W<0 THEN [ ア ]
170   PRINT X;Y;Z;W
180 NEXT X
190 END
```

(1)　〔プログラム1〕の $\boxed{\text{ア}}$ に当てはまるものを，次の⓪～⑤のうちから一つ選べ。

⓪　LET X=C　　①　LET Y=A　　②　GOTO 110

③　GOTO 120　　④　GOTO 170　　⑤　GOTO 180

$\boxed{\text{イ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～⑦のうちから一つ選べ。

⓪　X+B+C　　①　X+B-C　　②　X-B+C　　③　X-B-C

④　-X+B+C　　⑤　-X+B-C　　⑥　-X-B+C　　⑦　-X-B-C

（数学Ⅱ・数学B第6問は次ページに続く。）

(2) 〔プログラム 1〕を実行し，変数 A に 5，変数 B に 2，変数 C に 3 を入力したとき，150 行は $\boxed{\text{ウ}}$ 回，170 行は $\boxed{\text{エ}}$ 回実行される。

次に，〔プログラム 1〕の 140 行を削除して，110 行を次の三つの行で置き換えた〔プログラム 2〕を作成した。

$\boxed{\text{オ}}$

```
112 FOR X=0 TO I
```

ただし， $\boxed{\text{オ}}$ は二つの行からなり，〔プログラム 1〕と〔プログラム 2〕を実行したときの出力は，つねに一致するものとする。

(3) 〔プログラム 2〕の $\boxed{\text{オ}}$ に当てはまる二つの行を，次の⓪～⑤のうちから一つ選べ。

⓪
```
110 LET I=A
111 IF A<C THEN LET I=C
```

①
```
110 LET I=C
111 IF A<C THEN LET I=A
```

②
```
110 LET I=C-B
111 IF B>C THEN LET I=0
```

③
```
110 IF A>C THEN LET I=A
111 IF A<C THEN LET I=C
```

④
```
110 IF A>C THEN LET I=C
111 IF A<C THEN LET I=A
```

⑤
```
110 IF B>C THEN LET I=0
111 IF B<C THEN LET I=C-B
```

(4) 〔プログラム 2〕を実行し，変数 A，B，C に条件 $\boxed{\text{カ}}$ を満たすどのような値を入力しても，170 行の PRINT 文は 1 回も実行されない。 $\boxed{\text{カ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～⑤のうちから一つ選べ。

⓪ `A-B-C>=0`　　① `A-B-C<0`　　② `A-B+C>=0`

③ `A-B+C<0`　　④ `A+B-C>=0`　　⑤ `A+B-C<0`

(数学Ⅱ・数学B第 6 問は次ページに続く。)

与えられた自然数A，B，Dについて，条件

$$\begin{cases} x + y = A \\ z + w = B \\ x + z + v = D \end{cases}$$

を満たす0以上の整数x，y，z，w，vをすべて求めたい。そのために，〔プログラム2〕を変更して，vの値ごとにx，y，z，wの値を定める〔プログラム3〕を作成した。

〔プログラム3〕

```
100 INPUT A,B,D
101 FOR V=0 TO  キ
102   LET C= ク
103   IF  カ  THEN  ケ
 オ
112   FOR X=0 TO I
120     LET Y=A-X
130     LET Z=C-X
150     LET W= イ
160     IF W<0 THEN  ア
170     PRINT X;Y;Z;W;V
180   NEXT X
181 NEXT V
190 END
```

ただし，行番号に下線が引かれた行は，変更または追加された行である。

(数学Ⅱ・数学B第6問は次ページに続く。)

(5) 〔プログラム3〕の $\boxed{\text{キ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～⑦のうちから一つ選べ。

⓪ A　① B　② D　③ A+B
④ D-A　⑤ D-B　⑥ A+B-D　⑦ D-A-B

$\boxed{\text{ク}}$ に当てはまるものを，次の⓪～⑧のうちから一つ選べ。

⓪ V　① D+V　② D-V
③ A+B+V　④ A+B-V　⑤ A+B-D+V
⑥ A+B-D-V　⑦ D-A-B+V　⑧ D-A-B-V

$\boxed{\text{ケ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～⑤のうちから一つ選べ。

⓪ LET C=C-1　① LET V=V+1
② GOTO 170　③ GOTO 180
④ GOTO 181　⑤ GOTO 190

(6) 〔プログラム3〕を実行し，変数Aに2，変数Bに2，変数Dに5を入力したとき，150行は $\boxed{\text{コサ}}$ 回，170行は $\boxed{\text{シ}}$ 回実行される。