数学Ⅱ・数学B

問　題	選　択　方　法
第1問	必　　答
第2問	必　　答
第3問	いずれか2問を選択し，解答しなさい。
第4問	
第5問	
第6問	

数学Ⅱ・数学B （注）この科目には，選択問題があります。（15ページ参照。）

第1問 （必答問題）（配点　30）

〔1〕 $a > 0$，$a \neq 1$ として，不等式

$$2\log_a(8-x) > \log_a(x-2) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

を満たす x の値の範囲を求めよう。

真数は正であるから，$\boxed{\text{ア}} < x < \boxed{\text{イ}}$ が成り立つ。ただし，対数 $\log_a b$ に対し，a を底といい，b を真数という。

底 a が $a < 1$ を満たすとき，不等式①は

$$x^2 - \boxed{\text{ウエ}}\,x + \boxed{\text{オカ}}\ \boxed{\text{キ}}\ 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

となる。ただし，$\boxed{\text{キ}}$ については，当てはまるものを，次の⓪～②のうちから一つ選べ。

⓪ $<$　　　① $=$　　　② $>$

（数学Ⅱ・数学B第1問は次ページに続く。）

したがって，真数が正であることと②から，$a<1$ のとき，不等式①を満たす x のとり得る値の範囲は $\boxed{\text{ク}}<x<\boxed{\text{ケ}}$ である。

同様にして，$a>1$ のときには，不等式①を満たす x のとり得る値の範囲は $\boxed{\text{コ}}<x<\boxed{\text{サ}}$ であることがわかる。

（数学Ⅱ・数学B第1問は次ページに続く。）

〔2〕 $0 \leqq \alpha \leqq \pi$ として

$$\sin \alpha = \cos 2\beta$$

を満たす β について考えよう。ただし，$0 \leqq \beta \leqq \pi$ とする。

たとえば，$\alpha = \dfrac{\pi}{6}$ のとき，β のとり得る値は $\dfrac{\pi}{\boxed{\text{シ}}}$ と $\dfrac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{シ}}}\pi$ の二つである。

このように，α の各値に対して，β のとり得る値は二つある。そのうちの小さい方を β_1，大きい方を β_2 とし

$$y = \sin\left(\alpha + \frac{\beta_1}{2} + \frac{\beta_2}{3}\right)$$

が最大となる α の値とそのときの y の値を求めよう。

β_1，β_2 を α を用いて表すと，$0 \leqq \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ のときは

$$\beta_1 = \frac{\pi}{\boxed{\text{セ}}} - \frac{\alpha}{\boxed{\text{ソ}}},\quad \beta_2 = \frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{セ}}}\pi + \frac{\alpha}{\boxed{\text{ソ}}}$$

となり，$\dfrac{\pi}{2} \leqq \alpha \leqq \pi$ のときは

$$\beta_1 = -\frac{\pi}{\boxed{\text{チ}}} + \frac{\alpha}{\boxed{\text{ツ}}},\quad \beta_2 = \frac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{チ}}}\pi - \frac{\alpha}{\boxed{\text{ツ}}}$$

となる。

(数学Ⅱ・数学B第1問は次ページに続く。)

したがって，$\alpha+\dfrac{\beta_1}{2}+\dfrac{\beta_2}{3}$ のとり得る値の範囲は

$$\frac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}}\pi \leqq \alpha+\frac{\beta_1}{2}+\frac{\beta_2}{3} \leqq \frac{\boxed{\text{ニヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}}\pi$$

である。よって，y が最大となる α の値は $\dfrac{\boxed{\text{ノ}}}{\boxed{\text{ハヒ}}}\pi$ であり，そのときの y の値は $\boxed{\text{フ}}$ であることがわかる。$\boxed{\text{フ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ。

⓪ $\dfrac{1}{2}$　　① 1　　② $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　③ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

第2問 (必答問題) (配点 30)

座標平面上で曲線 $y = x^3$ を C とし，放物線 $y = x^2 + px + q$ を D とする。

(1) 曲線 C 上の点 $\mathrm{P}(a,\ a^3)$ における C の接線の方程式は

$$y = 3a^{\boxed{\text{ア}}}x - \boxed{\text{イ}}\,a^{\boxed{\text{ウ}}}$$

である。放物線 D は点 P を通り，D の P における接線と，C の P における接線が一致するとする。このとき，p と q を a を用いて表すと

$$\begin{cases} p = 3a^{\boxed{\text{エ}}} - \boxed{\text{オ}}\,a \\ q = \boxed{\text{カキ}}\,a^3 + a^{\boxed{\text{ク}}} \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{①}$$

となる。

以下，p，q は ① を満たすとする。

(数学Ⅱ・数学B第2問は次ページに続く。)

(2) 放物線 D が y 軸上の与えられた点 Q$(0,\ b)$ を通るとき

$$b = \boxed{\text{ケコ}}\,a^3 + a^{\boxed{\text{サ}}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{②}$$

が成り立つ。与えられた b に対して，② を満たす a の値の個数を調べよう。

そのために，関数

$$f(x) = \boxed{\text{ケコ}}\,x^3 + x^{\boxed{\text{サ}}}$$

の増減を調べる。関数 $f(x)$ は，$x = \boxed{\text{シ}}$ で極小値 $\boxed{\text{ス}}$ をとり，

$x = \dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$ で極大値 $\dfrac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チツ}}}$ をとる。

関数 $y = f(x)$ のグラフをかくことにより，$\boxed{\text{ス}} < b < \dfrac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チツ}}}$ のとき，② を満たす a の値の個数は $\boxed{\text{テ}}$ であることがわかる。

(3) 放物線 D の頂点が x 軸上にあるのは，$a = \boxed{\text{ト}}$，$\dfrac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニ}}}$ の二つの場合である。$a = \boxed{\text{ト}}$ のときの放物線を D_1，$a = \dfrac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニ}}}$ のときの放物線を D_2 とする。D_1，D_2 と x 軸で囲まれた図形の面積は $\dfrac{2^{\boxed{\text{ヌ}}}}{3^{\boxed{\text{ネノ}}}}$ である。

第3問 （選択問題）（配点　20）

$\{a_n\}$を$a_2 = -\dfrac{7}{3}$，$a_5 = -\dfrac{25}{3}$である等差数列とし，自然数nに対して，

$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$とおく。

$a_1 = \dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$であり，$\{a_n\}$の公差は$\boxed{\text{エオ}}$である。したがって

$$a_n = \boxed{\text{カキ}}\,n + \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}} \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

$$S_n = \boxed{\text{コ}}\,n^2 + \frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}\,n \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

である。

（数学Ⅱ・数学B第3問は次ページに続く。）

次に，数列$\{b_n\}$は

$$\sum_{k=1}^{n} b_k = \frac{4}{3} b_n + S_n \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{①}$$

を満たすとする。数列$\{b_n\}$の一般項を求めよう。①から，$b_1 = \boxed{\text{ス}}$である。さらに，$\sum_{k=1}^{n+1} b_k = \sum_{k=1}^{n} b_k + b_{n+1}$に注意して，①を利用すると

$$b_{n+1} = \boxed{\text{セ}}\, b_n + \boxed{\text{ソ}}\, n + \boxed{\text{タ}} \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

が成り立ち，この等式は

$$b_{n+1} + \boxed{\text{チ}}\,(n+1) + \boxed{\text{ツ}}$$
$$= \boxed{\text{セ}}\left(b_n + \boxed{\text{チ}}\, n + \boxed{\text{ツ}}\right) \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

と変形できる。ここで

$$c_n = b_n + \boxed{\text{チ}}\, n + \boxed{\text{ツ}} \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \ \cdots\cdots\cdots \text{②}$$

とおくと，$\{c_n\}$は，$c_1 = \boxed{\text{テ}}$，公比が$\boxed{\text{ト}}$の等比数列であるから，②により

$$b_n = \boxed{\text{ナ}}^{\boxed{\text{ニ}}} - \boxed{\text{ヌ}}\, n - \boxed{\text{ネ}} \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

である。ただし，$\boxed{\text{ニ}}$については，当てはまるものを，次の⓪～④のうちから一つ選べ。

⓪ $n-2$　① $n-1$　② n　③ $n+1$　④ $n+2$

第4問 （選択問題）（配点　20）

空間に異なる4点O，A，B，Cを，$\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OB} \perp \overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OC} \perp \overrightarrow{OA}$ となるようにとり，$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$，$\overrightarrow{OB} = \vec{b}$，$\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とおく。さらに，3点D，E，Fを，$\overrightarrow{OD} = \vec{a} + \vec{b}$，$\overrightarrow{OE} = \vec{b} + \vec{c}$，$\overrightarrow{OF} = \vec{a} + \vec{c}$ となるようにとり，線分BDの中点をL，線分CEの中点をMとし，線分ADを3：1に内分する点をNとする。

(1) $\overrightarrow{OM}$，$\overrightarrow{ON}$ は，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{\boxed{\text{ア}}}\vec{b} + \vec{c}, \qquad \overrightarrow{ON} = \vec{a} + \frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}\vec{b}$$

と表される。

(2) 2直線FL，MNが交わることを確かめよう。$0 < s < 1$ とし，線分FLを $s : (1-s)$ に内分する点をPとする。$\overrightarrow{OP}$ は，s と $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて

$$\overrightarrow{OP} = \left(\boxed{\text{エ}} - \frac{s}{\boxed{\text{オ}}}\right)\vec{a} + s\vec{b} + \left(\boxed{\text{カ}} - s\right)\vec{c}$$

と表される。$s = \dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ のとき，$\overrightarrow{MP} = \dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}\overrightarrow{MN}$ となるので，M，N，Pは一直線上にある。よって，2直線FL，MNは交わることがわかる。

（数学Ⅱ・数学B第4問は次ページに続く。）

(3) 2直線FL, MNの交点をGとする。$\overrightarrow{\mathrm{OG}}$, $\overrightarrow{\mathrm{GF}}$は, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}\left(\boxed{\text{ス}}\,\vec{a}+\boxed{\text{セ}}\,\vec{b}+\vec{c}\right)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{GF}}=\frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}\left(\vec{a}-\boxed{\text{セ}}\,\vec{b}+\boxed{\text{ソ}}\,\vec{c}\right)$$

と表される。

$|\vec{a}|=\sqrt{5}$, $|\vec{b}|=4$, $|\vec{c}|=\sqrt{3}$とする。このとき, $|\overrightarrow{\mathrm{GF}}|=\boxed{\text{タ}}$, $|\overrightarrow{\mathrm{GM}}|=2$となる。

次に, 直線OC上に点Hをとり, 実数tを用いて, $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=t\vec{c}$と表す。$\overrightarrow{\mathrm{GF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{GH}}$, $\overrightarrow{\mathrm{GM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{GH}}$は, tを用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{GF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{GH}}=\boxed{\text{チ}}\,t+\frac{\boxed{\text{ツテ}}}{\boxed{\text{ト}}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

$$\overrightarrow{\mathrm{GM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{GH}}=2t+\frac{10}{3} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

と表される。

さらに, $\angle\mathrm{FGH}=\angle\mathrm{MGH}$とする。このときの$t$の値を求めよう。

$|\overrightarrow{\mathrm{GF}}|=\boxed{\text{タ}}$, $|\overrightarrow{\mathrm{GM}}|=2$と$\angle\mathrm{FGH}=\angle\mathrm{MGH}$であることから

$$\overrightarrow{\mathrm{GF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{GH}}=\frac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニ}}}\overrightarrow{\mathrm{GM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{GH}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

が成り立つ。①, ②, ③から, $t=\dfrac{\boxed{\text{ヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}}$である。

第5問 （選択問題）（配点　20）

ある高等学校のAクラスには全部で20人の生徒がいる。次の表は，その20人の生徒の国語と英語のテストの結果をまとめたものである。表の横軸は国語の得点を，縦軸は英語の得点を表し，表中の数値は，国語の得点と英語の得点の組み合わせに対応する人数を表している。ただし，得点は0以上10以下の整数値をとり，空欄は0人であることを表している。たとえば，国語の得点が7点で英語の得点が6点である生徒の人数は2である。

英語（点）＼国語（点）	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10											
9											
8							1		1		
7						5					
6					4	1	1	2			
5						2					
4				1	1						
3				1							
2											
1											
0											

また，次の表は，Aクラスの20人について，上の表の国語と英語の得点の平均値と分散をまとめたものである。ただし，表の数値はすべて正確な値であり，四捨五入されていない。

	国　語	英　語
平均値	$\boxed{\text{B}}$	6.0
分　散	1.60	$\boxed{\text{C}}$

（数学Ⅱ・数学B第5問は次ページに続く。）

以下，小数の形で解答する場合，指定された桁（けた）数の一つ下の桁を四捨五入し，解答せよ。途中で割り切れた場合，指定された桁まで⓪にマークすること。

(1) Aクラスの20人のうち，国語の得点が4点の生徒は $\boxed{\text{ア}}$ 人であり，英語の得点が国語の得点以下の生徒は $\boxed{\text{イ}}$ 人である。

(2) Aクラスの20人について，国語の得点の平均値Bは $\boxed{\text{ウ}}$. $\boxed{\text{エ}}$ 点であり，英語の得点の分散Cの値は $\boxed{\text{オ}}$. $\boxed{\text{カキ}}$ である。

(3) Aクラスの20人のうち，国語の得点が平均値 $\boxed{\text{ウ}}$. $\boxed{\text{エ}}$ 点と異なり，かつ，英語の得点も平均値6.0点と異なる生徒は $\boxed{\text{ク}}$ 人である。

Aクラスの20人について，国語の得点と英語の得点の相関係数の値は $\boxed{\text{ケ}}$. $\boxed{\text{コサシ}}$ である。

(数学Ⅱ・数学B第5問は次ページに続く。)

数学Ⅱ・数学B

次の表は，Aクラスの20人に他のクラスの40人を加えた60人の生徒について，前の表と同じ国語と英語のテストの結果をまとめたものである。この60人について，国語の得点の平均値も英語の得点の平均値も，それぞれちょうど5.4点である。

英語(点)＼国語(点)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10											
9											
8							1		1		
7						5			2	1	
6					4	1	8	5	F		
5					3	5	5	1			
4			2	2	D	E	2	2			
3		1		1							
2											
1											
0											

(4) 上の表でD，E，Fを除いた人数は52人である。その52人について，国語の得点の合計は $\boxed{\text{スセソ}}$ 点であり，英語の得点の合計は288点である。

したがって，連立方程式

$$\mathrm{D}+\mathrm{E}+\mathrm{F}=\boxed{\text{タ}}$$

$$4\mathrm{D}+5\mathrm{E}+8\mathrm{F}=\boxed{\text{チツ}}$$

$$4\mathrm{D}+4\mathrm{E}+6\mathrm{F}=36$$

を解くことによって，D，E，Fの値は，それぞれ，$\boxed{\text{テ}}$ 人，$\boxed{\text{ト}}$ 人，$\boxed{\text{ナ}}$ 人であることがわかる。

(数学Ⅱ・数学B第5問は次ページに続く。)

(5) 60人からAクラスの20人を除いた40人について，英語の得点の平均値は $\boxed{\text{ニ}}.\boxed{\text{ヌ}}$ 点であり，中央値は $\boxed{\text{ネ}}.\boxed{\text{ノ}}$ 点である。

(6) 60人のうち，国語の得点が x 点である生徒について，英語の得点の平均値 $M(x)$ と英語の得点の中央値 $N(x)$ を考える。ただし，x は1以上9以下の整数とする。このとき，$M(x) \neq N(x)$ となる x は $\boxed{\text{ハ}}$ 個ある。一方，$M(x) < x$ かつ $N(x) < x$ となる x は $\boxed{\text{ヒ}}$ 個ある。

第6問 （選択問題）（配点　20）

与えられた二つの自然数 M と N について，M から始まる N 個の連続する自然数の積 $M\times(M+1)\times(M+2)\times\cdots\times(M+N-1)$ が 8 で割り切れるかどうかを調べ，その結果を出力する〔プログラム 1〕を作成した。ただし，INT(X) は X を超えない最大の整数を表す関数である。

〔プログラム 1〕

```
100 INPUT PROMPT "M=":M
110 INPUT PROMPT "N=":N
120 [ ア ]
130 FOR I=0 TO [ イ ]
140    LET X=X*(M+I)
150 NEXT I
160 IF [ ウ ] THEN
170    PRINT "8 で割り切れます "
180    [ エ ]
190 END IF
200 PRINT "8 で割り切れません "
210 END
```

（数学Ⅱ・数学B第6問は次ページに続く。）

(1) 〔プログラム1〕の $\boxed{\text{ア}}$ に当てはまるものを，次の⓪～⑤のうちから一つ選べ。

⓪ LET X=0	① LET X=1	② LET X=M
③ LET X=M+N-1	④ LET N=M	⑤ LET N=M+N

$\boxed{\text{イ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～⑤のうちから一つ選べ。

⓪ M-1	① M	② N-1
③ N	④ M+N-1	⑤ M+N

$\boxed{\text{ウ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～⑤のうちから一つ選べ。

⓪ N-INT(N/8)*8<0	① N-INT(N/8)*8=0	② N-INT(N/8)*8>0
③ X-INT(X/8)*8<0	④ X-INT(X/8)*8=0	⑤ X-INT(X/8)*8>0

$\boxed{\text{エ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～⑤のうちから一つ選べ。

⓪ LET X=X+1	① LET M=M+1	② LET X=X/8
③ GOTO 150	④ GOTO 200	⑤ GOTO 210

(2) 〔プログラム1〕を実行したとき，「8で割り切れます」と出力されるような変数M，Nへの入力について，M+Nの値の最小値は $\boxed{\text{オ}}$ である。

また，変数Mにどんな自然数を入力しても，つねに「8で割り切れます」と出力されるような変数Nへの入力がある。このような変数Nへの入力のうち，最小の自然数は $\boxed{\text{カ}}$ である。

(数学Ⅱ・数学B第6問は次ページに続く。)

二つの自然数 M と L が与えられたとき，条件

「N は L 以下の自然数であり，かつ M から始まる N 個の連続する自然数の積 $M\times(M+1)\times(M+2)\times\cdots\times(M+N-1)$ は 2^N で割り切れるが 2^{N+1} では割り切れない」　　　　………$(*)$

を満たす N の個数を求めたい。そのために，〔プログラム 1〕を変更して，〔プログラム 2〕を作成した。ただし，100 行と，120 行から 150 行まで，190 行，210 行は変更していない。

〔プログラム 2〕

```
100 INPUT PROMPT "M=":M
110 INPUT PROMPT "L=":L
112 [ キ ]
114 FOR N=1 TO L
120     [ ア ]
130     FOR I=0 TO [ イ ]
140         LET X=X*(M+I)
150     NEXT I
152     LET K=2^N
160     IF [ ク ] THEN
170         LET K=K*2
180         IF [ ケ ] THEN
182             [ コ ]
184         END IF
190     END IF
200 NEXT N
202 PRINT "求める個数は";C
210 END
```

(数学Ⅱ・数学B第6問は次ページに続く。)

(3) 〔プログラム 2〕の $\boxed{\text{キ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～⑤のうちから一つ選べ。

⓪ LET C=0　　① LET C=M-1　　② LET C=L-1
③ LET C=1　　④ LET C=M　　⑤ LET C=L

$\boxed{\text{ク}}$，$\boxed{\text{ケ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～⑤のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを選んでもよい。

⓪ N-INT(N/K)*K<0　　① N-INT(N/K)*K=0　　② N-INT(N/K)*K>0
③ X-INT(X/K)*K<0　　④ X-INT(X/K)*K=0　　⑤ X-INT(X/K)*K>0

$\boxed{\text{コ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～⑤のうちから一つ選べ。

⓪ LET X=X+1　　① LET N=N+1　　② LET K=K*2
③ LET C=C+1　　④ GOTO 200　　⑤ GOTO 210

(4) 〔プログラム 2〕を実行し，変数 M に 4，変数 L に 5 を入力したとき，202 行で出力される変数 C の値は $\boxed{\text{サ}}$ である。

(5) 〔プログラム 2〕において，条件(*)を満たす N の値をすべて出力するためには，たとえば，$\boxed{\text{シ}}$ に

```
PRINT N
```

という行を挿入すればよい。$\boxed{\text{シ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ。

⓪ 110 行と 112 行の間　　① 150 行と 152 行の間
② 180 行と 182 行の間　　③ 200 行と 202 行の間