2011 大学入試センター追試験問題　数学Ⅱ・数学Ｂ（60 分）

第１問（必答問題）（配点　30）

〔1〕　$u=\log_2(6-x)$，$v=\log_2(x-1)$ とおく．uv の最大値を求めよう．

真数は正であるから $\boxed{\text{ア}}<x<\boxed{\text{イ}}$ である．

$\boxed{\text{ア}}<x\leqq\boxed{\text{ウ}}$ または $\boxed{\text{エ}}\leqq x<\boxed{\text{イ}}$ のとき，$uv\leqq 0$ であり，

$\boxed{\text{ウ}}<x<\boxed{\text{エ}}$ のとき，$u>0$，$v>0$ である．

よって，uv の最大値は $\boxed{\text{ウ}}<x<\boxed{\text{エ}}$ の範囲で考えればよい．

このとき，相加平均と相乗平均の関係により

$$\sqrt{uv}\leqq\frac{1}{2}(u+v)=\frac{1}{2}\log_2\left(\boxed{\text{オ}}x^2+\boxed{\text{カ}}x-\boxed{\text{キ}}\right)\quad\cdots\cdots\quad(*)$$

である．

x の２次関数 $\boxed{\text{オ}}x^2+\boxed{\text{カ}}x-\boxed{\text{キ}}$ は $x=\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ で最大値 $\dfrac{\boxed{\text{コサ}}}{\boxed{\text{シ}}}$ をとる．

$\boxed{\text{ウ}}<\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}<\boxed{\text{エ}}$ であり，$x=\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ のとき，（$*$）の不等式において等号が成り立つ．したがって，uv は $x=\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ のときに最大値

$$\left(\log_2\boxed{\text{ス}}-\boxed{\text{セ}}\right)^{\boxed{\text{ソ}}}$$

をとる．

〔2〕 $\dfrac{\pi}{8}<\theta<\dfrac{3}{8}\pi$ のとき

$$\tan 4\theta=\frac{1}{2}\tan\theta \qquad \cdots\cdots①$$

を満たす θ について考えよう.

一般に, $\tan 2\theta$ を $\tan\theta$ を用いて表すと $\tan 2\theta=\dfrac{\boxed{タ}\tan\theta}{\boxed{チ}-\tan^2\theta}$ である. さらに, $\tan 4\theta$ を $\tan\theta$ を用いて表すと

$$\tan 4\theta=\frac{-\boxed{ツ}\tan^3\theta+\boxed{テ}\tan\theta}{\tan^4\theta-\boxed{ト}\tan^2\theta+\boxed{ナ}} \qquad \cdots\cdots②$$

である. ①, ②から

$$\frac{\tan\theta\left(\tan^4\theta+\boxed{ニ}\tan^2\theta-\boxed{ヌ}\right)}{\tan^4\theta-\boxed{ト}\tan^2\theta+\boxed{ナ}}=0 \qquad \cdots\cdots③$$

となる.

θ についての条件により $\tan\theta>0$ であるので, ③から

$$\tan\theta=\sqrt{-\boxed{ネ}+\boxed{ノ}\sqrt{\boxed{ハ}}}$$

を得る. この θ について, 不等式 $\boxed{ヒ}$ が成り立つ. $\boxed{ヒ}$ に当てはまるものを, 次の ⓪ ～ ③ のうちから一つ選べ.

⓪ $\dfrac{\pi}{8}<\theta\leqq\dfrac{\pi}{6}$　　① $\dfrac{\pi}{6}<\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}$

② $\dfrac{\pi}{4}<\theta\leqq\dfrac{\pi}{3}$　　③ $\dfrac{\pi}{3}<\theta<\dfrac{3}{8}\pi$

第２問（必答問題）（配点　30）

k を実数とし，$P(x)=x^3-(k+20)x-2k$ とする．

(1)　3 次方程式 $P(x)=0$ がただ一つの実数解 α をもつとき，k と α のとり得る値の範囲を求めよう．

座標平面上で，曲線 $y=x^3-20x$ を C，直線 $y=k(x+2)$ を ℓ とする．はじめに，直線 ℓ が C と接するような k の値を求める．直線 ℓ は k の値によらずに定点 $\mathrm{A}\left(\boxed{\text{アイ}},\ \boxed{\text{ウ}}\right)$ を通る．一方，C 上の点 $(t,\ t^3-20t)$ における曲線 C の接線の方程式は

$$y=\left(\boxed{\text{エ}}t^2-\boxed{\text{オカ}}\right)x-\boxed{\text{キ}}t^3$$

である．この接線が A を通るとすると $t=\boxed{\text{ク}}$ である．したがって，A から曲線 C に引いた接線の方程式は

$$y=\boxed{\text{ケコ}}x-\boxed{\text{サシ}}$$

であり，このときの k の値は $\boxed{\text{ケコ}}$ である．また，この接線と C との共有点の x 座標は

$$x=\boxed{\text{スセ}},\ \boxed{\text{ソ}}$$

である．

方程式$P(x)=0$の実数解は曲線Cと直線ℓとの共有点のx座標である．したがって，この方程式がただ一つの実数解をもつときのkのとり得る値の範囲は

$$k < \boxed{\text{タチ}}$$

であり，その実数解αのとり得る値の範囲は

$$\boxed{\text{ツテ}} < \alpha < \boxed{\text{トナ}}$$

である．

(2) 2曲線$y=P(x)$，$y=x^3-kx^2-20x$と2直線$x=1$，$x=2$で囲まれた図形の面積が1となるとき

$$k=\pm\frac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$$

である．

第３問（選択問題）（配点　20）

数列$\{a_n\}$は，漸化式

$$a_1=\frac{1}{2},\ a_n+a_{n+1}=\frac{1}{n(n+2)}\quad (n=1,2,3,\cdots)$$

を満たすとする．$\{a_n\}$の初項から第n項までの和をS_nとする．

$$S_3=a_1+(a_2+a_3)=\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$$

$$S_4=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)=\frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$$

である．自然数mに対して，$S_{2m}=\sum_{k=1}^{m}(a_{2k-1}+a_{2k})$と表されるので

$$S_{2m}=\frac{1}{\boxed{\text{オ}}}\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{2k-\boxed{\text{カ}}}-\frac{1}{2k+\boxed{\text{キ}}}\right)$$

$$=\frac{m}{\boxed{\text{ク}}m+\boxed{\text{ケ}}}$$

であり，同様に，$S_{2m+1}=a_1+\sum_{k=1}^{m}(a_{2k}+a_{2k+1})$と表されるので

$$S_{2m+1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{\boxed{\text{コ}}}\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+\boxed{\text{サ}}}\right)$$

$$=\frac{\boxed{\text{シ}}m+2}{\boxed{\text{ス}}\left(m+\boxed{\text{セ}}\right)}$$

である．

したがって，自然数 m に対して

$$a_{2m}=\frac{\boxed{\text{ソタ}}\,m^{\boxed{\text{チ}}}-m+\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}\,m\left(\boxed{\text{ク}}\,m+\boxed{\text{ケ}}\right)}$$

$$a_{2m+1}=\frac{2m^{\boxed{\text{チ}}}+3m+2}{\boxed{\text{テ}}\left(m+\boxed{\text{セ}}\right)\left(\boxed{\text{ク}}\,m+\boxed{\text{ケ}}\right)}$$

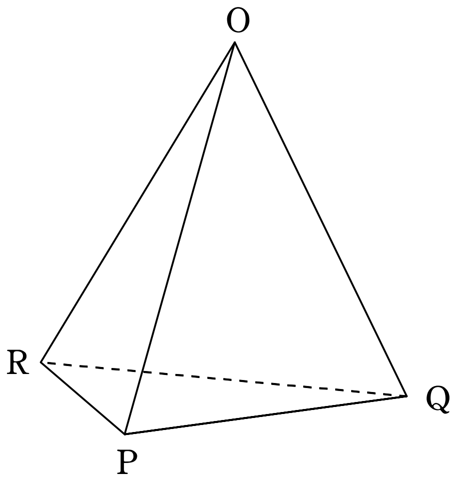
である．以上のことから，2 以上の自然数 n に対して

$$a_n=\frac{1}{\boxed{\text{ト}}\,n\left(n+\boxed{\text{ナ}}\right)}+\frac{\left(-\boxed{\text{ニ}}\right)^{n+1}}{\boxed{\text{ヌ}}} \qquad \cdots\cdots \quad (*)$$

である． $a_1=\dfrac{1}{2}$ であるから，（＊）は $n=1$ のときにも成り立つので，（＊）はすべての自然数 n に対して成り立つ．

第4問（選択問題）（配点　20）

四面体 OPQR において，点 P，Q，R の点 O を基準とする位置ベクトルをそれぞれ $\vec{p}$，$\vec{q}$，$\vec{r}$ とおく．OP＝4，OQ＝$3\sqrt{2}$，OR＝$2\sqrt{7}$ であり，$\vec{p}\cdot\vec{q}=\vec{q}\cdot\vec{r}=\vec{r}\cdot\vec{p}=12$ であるとする．



辺 OP 上の点 X を，直線 QX と辺 OP が垂直であるようにとり，辺 OQ 上の点 Y を，直線 PY と辺 OQ が垂直であるようにとる．

(1)　実数 a を用いて $\overrightarrow{OX}=a\vec{p}$ と表す．このとき，$\overrightarrow{QX}=\boxed{\text{ア}}\,\vec{p}-\vec{q}$ である．直線 QX と辺 OP が垂直であるから，$a=\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ であり，$\overrightarrow{RX}\cdot\overrightarrow{OP}=\boxed{\text{エ}}$ である．同様に $\overrightarrow{OY}=\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}\vec{q}$ であり，$\overrightarrow{RY}\cdot\overrightarrow{OQ}=\boxed{\text{キ}}$ である．

(2) 直線 QX と直線 PY との交点を H とする．$\overrightarrow{OH}$ を $\vec{p}$，$\vec{q}$ を用いて表すと

$$\overrightarrow{OH}=\frac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}\vec{p}+\frac{\boxed{コ}}{\boxed{サ}}\vec{q}$$

である．辺 OR 上に点 Z をとり，実数 s を用いて $\overrightarrow{OZ}=s\vec{r}$ と表す．3 点 P，Q，Z の定める平面を α とし，直線 HR と平面 α との交点を K とする．実数 t を用いて $\overrightarrow{HK}=t\overrightarrow{HR}$ と表す．このとき

$$\overrightarrow{OK}=\left(\boxed{シ}-t\right)\left(\frac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}\vec{p}+\frac{\boxed{コ}}{\boxed{サ}}\vec{q}\right)+t\vec{r}$$

である．一方，$\overrightarrow{OK}$ は実数 k，l を用いて $\overrightarrow{OK}=\overrightarrow{OP}+k\overrightarrow{PZ}+l\overrightarrow{PQ}$ とも表される．これから，$t=\dfrac{s}{\boxed{ス}-\boxed{セ}s}$ である．

直線 PZ と辺 OR が垂直であるとき，$s=\dfrac{\boxed{ソ}}{\boxed{タ}}$ であり，$t=\dfrac{\boxed{チ}}{\boxed{ツ}}$ である．