# 2009 大学入試センター追試験問題　数学Ⅱ・数学Ｂ（60 分）

## 第１問（必答問題）（配点　30）

〔1〕　実数 $x$ の関数

$$y = 4\cdot 8^{x} - 24\cdot 4^{x} + 57\cdot 2^{x} - 73 + 57\cdot 2^{-x} - 24\cdot 4^{-x} + 4\cdot 8^{-x}$$

の最小値を求めよう．

$t = 2^{x} + 2^{-x}$ とおくと $t$ の最小値は $\boxed{\text{ア}}$ であり，$t$ は $\boxed{\text{ア}}$ 以上のすべての実数をとり得る．

$y$ を $t$ で表すと

$$y = \boxed{\text{イ}}\,t^{3} - \boxed{\text{ウエ}}\,t^{2} + \boxed{\text{オカ}}\,t - \boxed{\text{キク}}$$

となる．これを因数分解して

$$y = \left(t - \boxed{\text{ケ}}\right)\left(\boxed{\text{コ}}\,t - \boxed{\text{サ}}\right)^{2}$$

が得られる．$t \geqq \boxed{\text{ア}}$ であるから，$y$ は $t = \dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$ のとき最小値 $\boxed{\text{セ}}$ をとる．

$t = \dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$ となるのは $x = \boxed{\text{ソ}}$ または $x = -\boxed{\text{ソ}}$ のときである．

〔2〕　$0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}$，$0 \leqq y < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲にある $x$，$y$ に対して，$u = \cos x$，$v = \cos y$ とおく．

$u$，$v$ が関係式

$$\log_{\frac{1}{2}}(2u^{2}) + \log_{2} v = 1 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (*)$$

を満たすとき，$J = -2\cos x + \dfrac{1-\cos 2x}{2} + \dfrac{3}{4}\cos y$ のとり得る値の範囲を求めよう．

まず，式（＊）より，$u^{2} = \dfrac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}\,v$ が成り立つ．

$u$ のとり得る値の範囲は，$\boxed{\text{ツ}} < u \leqq \dfrac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}$ である．また

$$\cos 2x = \boxed{\text{ナ}}\,u^{2} - \boxed{\text{ニ}},\quad \cos y = \boxed{\text{ヌ}}\,u^{2}$$

であるから

$$J = \boxed{\text{ネ}}\,u^{2} - \boxed{\text{ノ}}\,u + \boxed{\text{ハ}}$$

となる．したがって，$J$ のとり得る値の範囲は

$$\frac{\boxed{\text{ヒ}}}{\boxed{\text{フ}}} \leqq J < \boxed{\text{ヘ}}$$

である．

**第２問**（必答問題）（配点　30）

関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\int_2^x u(u-2)du$$

で定める．

$f(x)$ を計算すると

$$f(x)=\frac{1}{\boxed{\text{ア}}}\left(x+\boxed{\text{イ}}\right)\left(x-\boxed{\text{ウ}}\right)^2$$

となる．

$f(x)<0$ となる $x$ の値の範囲は $x<\boxed{\text{エオ}}$ である． $f(x)$ は $x=\boxed{\text{カ}}$ で極大値 $\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ をとり， $x=\boxed{\text{ケ}}$ で極小値 $\boxed{\text{コ}}$ をとる．

$y=f(x)$ のグラフを $C$ とする．$C$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$ における $C$ の接線 $\ell$ と $C$ の共有点の $x$ 座標は，$t$ および $\boxed{\text{サシ}}t+\boxed{\text{ス}}$ である．したがって，$C$ と $\ell$ が 1 点だけを共有するのは，$t=\boxed{\text{セ}}$ のときである．また，$C$ と $\ell$ のすべての共有点の $y$ 座標が正となるのは， $\boxed{\text{ソタ}}<t<\boxed{\text{チ}}$ かつ $t\fallingdotseq\dfrac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}}$ のときである．

$t\fallingdotseq\boxed{\text{セ}}$ とし， $s=t-\boxed{\text{セ}}$ とおく．接線 $\ell$ の傾きは， $s^2-\boxed{\text{ト}}$ である．$C$ と $\ell$ の二つの共有点のうち P と異なるものを Q とする．点 Q における $C$ の接線を $m$ とすると，$m$ の傾きは， $\boxed{\text{ナ}}s^2-\boxed{\text{ニ}}$ である．直線 $\ell$ と $m$ のなす角を $\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とすると

$$\frac{1}{\tan\theta}=\frac{1}{\boxed{\text{ヌ}}}\left(\boxed{\text{ネ}}s^2+\frac{\boxed{\text{ノ}}}{s^2}-\boxed{\text{ハ}}\right)$$

である．したがって，相加平均と相乗平均の関係により

$$t=\boxed{\text{セ}}\pm\frac{1}{\sqrt[4]{\boxed{\text{ヒ}}}}$$

のとき， $\tan\theta$ は最大となる．このとき， $\theta$ も最大となる．

## 第3問（選択問題）（配点　20）

数列$\{a_n\}$を$a_n = 2^n\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$で定める．

(1)　$a_n$を10で割った商を$b_n$とし，余りを$c_n$として，数列$\{b_n\}$と$\{c_n\}$を定める．このとき

$$a_n = 10b_n + c_n \qquad（b_n \text{ と } c_n \text{ は整数で，} 0 \leqq c_n < 10）$$

である．$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$，$T_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$，$U_n = \sum_{k=1}^{n} c_k$とおく．

$S_n$を求めると

$$S_n = \boxed{ア}^{n+\boxed{イ}} - \boxed{ウ}$$

である．

数列$\{c_n\}$の初めの5項は$c_1 = \boxed{エ}$，$c_2 = \boxed{オ}$，$c_3 = \boxed{カ}$，$c_4 = \boxed{キ}$，$c_5 = \boxed{ク}$である．

自然数 $p$ で，すべての $n$ に対して$c_{n+p} = c_n$となるものがあり，その最小のものは$p = \boxed{ケ}$である．

以下では$p = \boxed{ケ}$とし，自然数$n$を

$$n = pl + m \qquad（l \text{ と } m \text{ は整数で，} 0 \leqq m < p）$$

と表す．このとき，$U_n - \boxed{コサ}\,l$　は$m$だけで定まり，これを$d_m$とおけば

$d_0 = \boxed{シ}$，$d_1 = \boxed{ス}$，$d_{p-1} = \boxed{セソ}$である．

$$S_n = \boxed{タチ}\,T_n + U_n$$

であるから

$$T_n = \frac{\boxed{ツ}^n - \boxed{テ}}{\boxed{ト}} - \boxed{ナ}\,l - \frac{d_m}{\boxed{ニヌ}}$$

と表される．

(2)　$a_n$を11で割った余りを$e_n$（$0 \leqq e_n < 11$）として，数列$\{e_n\}$を定め

$$V_n = \sum_{k=1}^{n} e_k$$

とおく．自然数$q$で，すべての$n$に対して$e_{n+q} = e_n$となるものがあり，その最小のものは$q = \boxed{ネノ}$である．$q = \boxed{ネノ}$とし，自然数$n$を

$$n = ql + m \qquad（l \text{ と } m \text{ は整数で，} 0 \leqq m < q）$$

と表すとき

$$V_n - \boxed{ハヒ}\,l$$

は$m$だけで定まる．

## 第４問（選択問題）（配点　20）

平面に半径がそれぞれ1，2，$r$ の三つの円 $C$，$C'$，$C''$ があり，二つずつ互いに外接している．ここで $r>0$ である．円 $C$，$C'$，$C''$ の中心をそれぞれ P，P′，P″ とし，
$\overrightarrow{v_1}=\overrightarrow{\mathrm{PP'}}$，$\overrightarrow{v_2}=\overrightarrow{\mathrm{PP''}}$ とおく．

(1)　$\left|\overrightarrow{v_1}\right|=\boxed{\text{ア}}$，$\left|\overrightarrow{v_2}\right|=r+\boxed{\text{イ}}$，$\left|\overrightarrow{v_1}-\overrightarrow{v_2}\right|=r+\boxed{\text{ウ}}$ であり

$$\overrightarrow{v_1}\cdot\overrightarrow{v_2}=\boxed{\text{エ}}\,r+\boxed{\text{オ}}$$

である．したがって，$\overrightarrow{v_1}$ と $\overrightarrow{v_2}$ が垂直であるのは，$r=\boxed{\text{カ}}$ のときである．

(2)　$r=\boxed{\text{カ}}$ とする．$C$ と $C'$ の接点を通り $\overrightarrow{v_1}$ に垂直な直線を $\ell_1$ とし，$C$ と $C''$ の接点を通り $\overrightarrow{v_2}$ に垂直な直線を $\ell_2$ とする．

$\ell_1$ と $\ell_2$ の交点を Q とすれば

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}\overrightarrow{v_1}+\frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}\overrightarrow{v_2}$$

であり，$\overrightarrow{\mathrm{QP}}+s\overrightarrow{\mathrm{QP'}}+t\overrightarrow{\mathrm{QP''}}=\vec{0}$ を満たす実数 $s$，$t$ は

$$s=\frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}},\quad t=\frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}$$

である．

さらに，円 $C'$ と $C''$ の接点を R とすれば

$$\overrightarrow{\mathrm{QR}}=\frac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タチ}}}\overrightarrow{v_1}+\frac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テト}}}\overrightarrow{v_2}$$

であり，$\theta=\angle\mathrm{PQR}$ とおくと

$$\cos\theta=\frac{\boxed{\text{ナニ}}}{\boxed{\text{ヌネ}}}\sqrt{\boxed{\text{ノ}}}$$

である．

三角形 PQR の面積は，$\dfrac{\boxed{\text{ハ}}}{\boxed{\text{ヒフ}}}$ である．