2009 大学入試センター追試験問題　数学Ⅰ・数学A（60 分）（全問必答）

第１問（配点　20）

〔1〕　∠B が直角である直角三角形 ABC を考える．BC＝5 とし，AC＝x とおく．このとき，$x>5$ である．△ABC を AB を軸として 1 回転させてできる円錐（すい）の表面積を S_1 とおくと

$$S_1=\left(\boxed{\text{ア}}\,x+\boxed{\text{イウ}}\right)\pi$$

である．AB を直径とする球の表面積を S_2 とおくと

$$S_2=\left(x^2-\boxed{\text{エオ}}\right)\pi$$

である．$S_2>S_1$ となる x の値の範囲は $x>\boxed{\text{カキ}}$ である．

〔2〕　次の $\boxed{\text{ク}}$ ～ $\boxed{\text{コ}}$ に当てはまるものを，下の ⓪ ～ ③ のうちから一つずつ選べ．ただし，同じものを繰り返し選んでもよい．

実数 a，b に関する条件 p，q，r を次のように定める．

p：$a\leqq n<b$ を満たす整数 n がちょうど 2 個ある
q：$a\leqq 2m<b$ を満たす整数 m がちょうど 1 個ある
r：関数 $y=x+2$ のグラフが点 $(a,\ b)$ を通る

また，条件 q の否定を $\overline{q}$，条件 r の否定を $\overline{r}$ で表す．このとき

p は q であるための $\boxed{\text{ケ}}$．
p は r であるための $\boxed{\text{コ}}$．
$\overline{q}$ は $\overline{r}$ であるための $\boxed{\text{サ}}$．

⓪　必要十分条件である
①　必要条件であるが，十分条件でない
②　十分条件であるが，必要条件でない
③　必要条件でも十分条件でもない

第２問（配点　25）

$a \fallingdotseq 0$ を満たす定数 a に対し，x の２次関数

$$y = ax^2 + (4-4a)x + 3a - 10 \qquad \cdots\cdots ①$$

のグラフを G とする．

グラフ G の頂点の座標を a を用いて表すと

$$\left(\frac{\boxed{ア}\,a - \boxed{イ}}{a},\ -\frac{a^2 + \boxed{ウ}\,a + \boxed{エ}}{a} \right)$$

である．２次関数①は

$$y = a\left(x - \boxed{オ}\right)\left(x - \boxed{カ}\right) + 4x - 10$$

と変形される．ただし，$\boxed{オ} < \boxed{カ}$ とする．このことから，グラフ G は２点

$\left(\boxed{オ},\ \boxed{キク}\right)$，$\left(\boxed{カ},\ \boxed{ケ}\right)$ を通ることがわかる．

(1)　グラフ G が点 $\left(0,\ \dfrac{14}{3}\right)$ を通るとき，$a = \dfrac{\boxed{コサ}}{\boxed{シ}}$ である．このとき，関数①の $0 \leqq x \leqq 4$ における最大値は $\dfrac{\boxed{スセ}}{\boxed{ソ}}$ である．

(2)　関数①の $0 \leqq x \leqq 4$ における最大値が $\dfrac{14}{3}$ であるような a の値は

$\boxed{タチ}$，$\dfrac{\boxed{ツテ}}{\boxed{ト}}$ である．$a = \boxed{タチ}$ のとき，関数①の $0 \leqq x \leqq 4$ における最小値は $\boxed{ナニヌ}$ である．

第３問（配点　30）

△ABC において，AB＝AC＝10，cos ∠BAC＝$\dfrac{4}{5}$ とする．辺 AB の中点を D とする．

(1)　C から AB に垂線をひき，垂線と AB との交点を H とする．

このとき，AH＝$\boxed{\text{ア}}$，CH＝$\boxed{\text{イ}}$ であり

$$\text{BC}=\boxed{\text{ウ}}\sqrt{\boxed{\text{エオ}}},\quad \text{CD}=\boxed{\text{カ}}\sqrt{\boxed{\text{キ}}}$$

である．また

$$\angle\text{BCD}=\boxed{\text{クケ}}^\circ$$

である．

(2)　B において直線 AB に接し，C において直線 AC に接する円の中心を O とする．CD と円 O との交点のうち C と異なる方を E とする．

△BDE と相似な三角形は，次の ⓪ ～ ③ のうち $\boxed{\text{コ}}$ である．

⓪　△ABC　　①　△CDB　　②　△CAE　　③　△ACH

したがって

$$\text{BE}=\frac{\boxed{\text{サシ}}\sqrt{\boxed{\text{ス}}}}{\boxed{\text{セ}}}$$

である．よって

$$\text{AE}=\frac{\boxed{\text{ソタ}}\sqrt{\boxed{\text{チ}}}}{\boxed{\text{ツ}}}$$

であり，△ABE の面積は

$$\frac{\boxed{\text{テト}}}{\boxed{\text{ナ}}}$$

である．

AE の延長と円 O との交点のうち E と異なる方を F とするとき

$$\text{AF}=\boxed{\text{ニ}}\sqrt{\boxed{\text{ヌ}}}$$

である．

第４問（配点　25）

3つの袋A，B，Cがあり，それぞれの袋の中には1，2，3，4と番号がつけられた4個の玉が入っている．袋A，B，Cから1個ずつ玉を取り出し，その玉の番号をそれぞれa，b，cとする．このときの得点を次のように定める．

・a，b，cがすべて同じ数であるとき，得点を1点とする
・a，b，cの中の2つが同じ数であり，残りの1つがそれと異なる数であるとき，得点を4点とする．
・a，b，cが互いに異なる数であるときは，それらの数から重複を許して選んだ3つの数の積，すなわち

$$a^3,\ b^3,\ c^3,\ a^2b,\ ab^2,\ b^2c,\ bc^2,\ c^2a,\ ca^2,\ abc$$

が表す数の中で，異なるものの個数を得点とする

(1)　a，b，cがすべて同じ数である玉の取り出し方は $\boxed{\text{ア}}$ 通りである．また，a，b，cの中の 2 つが同じ数であり，残りの 1 つがそれと異なる数である玉の取り出し方は $\boxed{\text{イウ}}$ 通りである．

(2)　次の $\boxed{\text{エ}}$ ～ $\boxed{\text{キ}}$ に当てはまるものを，下の⓪～⑨のうちから一つずつ選べ．ただし，同じものを繰り返し選んでもよい．

$a=1$，$b=2$，$c=3$であるとき，得点は $\boxed{\text{エ}}$ 点である．

$a=1$，$b=2$，$c=4$であるとき，得点は $\boxed{\text{オ}}$ 点である．

$a=1$，$b=3$，$c=4$であるとき，得点は $\boxed{\text{カ}}$ 点である．

$a=2$，$b=3$，$c=4$であるとき，得点は $\boxed{\text{キ}}$ 点である．

⓪ 10　① 1　② 2　③ 3　④ 4
⑤ 5　⑥ 6　⑦ 7　⑧ 8　⑨ 9

(3)　得点が$a=1$，$b=2$，$c=3$のときの得点と同じになる確率は $\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケコ}}}$ であり，$a=1$，$b=2$，$c=4$のときの得点と同じになる確率は $\dfrac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シス}}}$ である．また，得点の期待値は $\dfrac{\boxed{\text{セソタ}}}{\boxed{\text{チツ}}}$ である．