2008 大学入試センター追試験問題　数学Ⅱ・数学Ｂ（60 分）

第１問（必答問題）（配点　30）

〔1〕　a は実数とする．x の方程式

$$(2^x+3^x)\left(\frac{9}{2^x}+\frac{4}{3^x}\right)=a \qquad \cdots\cdots\cdots ①$$

について考える．

(1)　$X=\left(\frac{3}{2}\right)^x$ とおけば，方程式①は X を用いて

$$\boxed{ア}\,X+\frac{\boxed{イ}}{X}+\boxed{ウエ}=a \qquad \cdots\cdots\cdots ②$$

となる．

方程式②が異なる二つの正の解をもつのは

$a>\boxed{オカ}$

のときである. このとき, 方程式①は異なる二つの解をもち, それらの和は $\boxed{キク}$ であることがわかる.

(2)　$a=50$ とする．方程式②の解は

$$X=\boxed{ケ},\ \frac{\boxed{コ}}{\boxed{サ}}$$

であるから，方程式①の解は

$$x=\frac{\boxed{シ}}{\log_2 3-\boxed{ス}},\ \frac{\boxed{セソ}\log_2 3}{\log_2 3-\boxed{ス}}$$

となる．

〔2〕　座標平面上の原点Oを中心とする半径aの円周上に異なる2点A$(a,\ 0)$およびPをとり，$\angle\mathrm{OPA}=\alpha$，$\angle\mathrm{POA}=\beta$，PA$=b$とおく．ただし，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，$0<\beta<\pi$とする．また

$$L=\frac{2}{a}\cos^2\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{b}\cos^2\frac{\beta}{2}$$

とおく．

(1)　実数θに対し

$$\cos^2\frac{\theta}{2}=\frac{\boxed{\text{タ}}+\cos\theta}{\boxed{\text{チ}}}$$

が成り立つから

$$L=\frac{1}{2ab}\left(a+\boxed{\text{ツ}}\,b+\boxed{\text{テト}}\cos\alpha+\boxed{\text{ナ}}\cos\beta\right)$$

となり

$$L=\frac{\left(\boxed{\text{ニ}}\,a+b\right)^{\boxed{\text{ヌ}}}}{\boxed{\text{ネ}}\,a^{\boxed{\text{ノ}}}\,b}$$

と表される．

(2)　aとbが$\boxed{\text{ニ}}\,a+b=1$を満たしながら動くとする．このとき，Lの最小値を求めるには，$\boxed{\text{ネ}}\,a^{\boxed{\text{ノ}}}\,b$の最大値を求めればよい．したがって，$L$は$a=\dfrac{\boxed{\text{ハ}}}{\boxed{\text{ヒ}}}$のとき，最小値$\dfrac{\boxed{\text{フヘ}}}{\boxed{\text{ホ}}}$をとる．

第２問（必答問題）（配点　30）

k を正の実数とし，座標平面上に点 P$(1,\ k)$ をとる．また，放物線 $y=\dfrac{1}{2}x^2-1$ を C とする．

(1)　点 $\left(t,\ \dfrac{1}{2}t^2-1\right)$ における C の接線 ℓ の方程式は $y=tx-\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}t^2-1$ である．また，点 $\left(t,\ \dfrac{1}{2}t^2-1\right)$ を通り，接線 ℓ に垂直な直線 m の方程式は

$$\boxed{\text{ウ}}\,x+\boxed{\text{エ}}\,ty=t^{\boxed{\text{オ}}}$$

である．直線 m が点 P を通るような t の値の個数を求めよう．

直線 m が点 P を通るとき，t は方程式

$$t^{\boxed{\text{オ}}}-\boxed{\text{カ}}\,kt-\boxed{\text{キ}}=0$$

を満たす．この方程式の左辺を $f(t)$ と表すとき，関数 $f(t)$ は

$$t=-\frac{\sqrt{\boxed{\text{ク}}\,k}}{\boxed{\text{ケ}}}\ \text{のとき，極大値}\ \frac{\boxed{\text{コ}}\sqrt{\boxed{\text{サ}}}}{\boxed{\text{シ}}}k\sqrt{k}-\boxed{\text{ス}}$$

$$t=\frac{\sqrt{\boxed{\text{ク}}\,k}}{\boxed{\text{ケ}}}\ \text{のとき，極小値}\ -\frac{\boxed{\text{コ}}\sqrt{\boxed{\text{サ}}}}{\boxed{\text{シ}}}k\sqrt{k}-\boxed{\text{ス}}$$

をとる．これより，直線 m が点 P を通るような t の値の個数について

$$0<k<\frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}\ \text{のとき}\ \boxed{\text{タ}}\ \text{個，}\ \frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}<k\ \text{のとき}\ \boxed{\text{チ}}\ \text{個}$$

であることがわかる．

(2)　$k=\dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$ のとき，方程式 $f(t)=0$ の解は $t=\boxed{\text{ツテ}}$，$\boxed{\text{ト}}$ である．$t=\boxed{\text{ツテ}}$，$\boxed{\text{ト}}$ に対応する直線 m を，それぞれ m_1，m_2 とする．

m_1 と放物線 C の二つの交点のうち，x 座標が $\boxed{\text{ツテ}}$ と異なる点を Q とすると，Q の x 座標は $\boxed{\text{ナ}}$ である．同様に，m_2 と C の二つの交点のうち，x 座標が $\boxed{\text{ト}}$ と異なる点を R とすると，R の x 座標は $\boxed{\text{ニヌ}}$ である．このとき，二つの線分 PQ，PR および C で囲まれた図形の面積は $\boxed{\text{ネノ}}$ である．

第３問（選択問題）（配点　20）

数列$\{a_n\}$を
$a_1=3,\ a_{n+1}=-2a_n+8\quad (n=1,2,3,\cdots)$
で定める．

(1)　数列$\{a_n\}$の一般項を求めると

$$a_n=\frac{\left(\boxed{アイ}\right)^{n-1}+\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}$$

である．したがって，自然数nに対し$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$とおけば

$$S_n=\frac{-\left(\boxed{オカ}\right)^{n}+\boxed{キク}n+\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}$$

である．

(2)　自然数nに対して$T_n=\sum_{k=1}^{n}\left|a_k\right|$とおく．

$a_n=0$となるのは$n=\boxed{サ}$のときであり，このとき$T_{\boxed{サ}}=\boxed{シ}$である．

また，$n>\boxed{サ}$のとき

$$\left|a_n\right|=\frac{\boxed{ス}^{n-1}+\boxed{ウ}\cdot\left(\boxed{セソ}\right)^{n-1}}{\boxed{エ}}$$

と表すことができる．これより，$n>\boxed{サ}$かつnが奇数ならば

$$T_n=\frac{\boxed{タ}^{n}+\boxed{チツ}}{\boxed{テ}}$$

であり，$n>\boxed{サ}$かつnが偶数ならば

$$T_n=\frac{\boxed{ト}^{n}+\boxed{ナニ}}{\boxed{ヌ}}$$

である．

第４問（選択問題）（配点　20）

平面上に一辺の長さが 1 である正三角形 OPQ がある．直線 OQ に関して P と対称な点を R とし，直線 OP に関して Q と対称な点を S とする．PS を $a:(1-a)$ $(0<a<1)$ に内分する点を A，OR を $b:(1-b)$ $(0<b<1)$ に内分する点を B とする．ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ をそれぞれ $\vec{p}$，$\vec{q}$ とおく．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を $\vec{p}$，$\vec{q}$ で表すと

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{p}-\boxed{\text{ア}}\vec{q}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=-\boxed{\text{イ}}\vec{p}+\boxed{\text{ウ}}\vec{q}$$

であるから，$\overrightarrow{\mathrm{AR}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BQ}}$ は

$$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=-\boxed{\text{エ}}\vec{p}+\left(\boxed{\text{オ}}+\boxed{\text{カ}}\right)\vec{q}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{BQ}}=\boxed{\text{キ}}\vec{p}+\left(\boxed{\text{ク}}-\boxed{\text{ケ}}\right)\vec{q}$$

となる．ただし，$\boxed{\text{オ}}$ と $\boxed{\text{カ}}$ は解答の順序を問わない．これより

$$\overrightarrow{\mathrm{AR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BQ}}=\frac{1}{\boxed{\text{コ}}}\left(\boxed{\text{サ}}a-\boxed{\text{シ}}b-ab\right)$$

である．

(2)　2 直線 AR と BQ が垂直に交わるとする．このとき，b は a を用いて

$$b=\frac{\boxed{\text{ス}}a}{a+\boxed{\text{セ}}}$$

と表される．

さらに $a=\dfrac{1}{2}$ とすると

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AR}}\right|=\frac{\sqrt{\boxed{\text{ソタ}}}}{\boxed{\text{チ}}},\quad \left|\overrightarrow{\mathrm{BQ}}\right|=\frac{\sqrt{\boxed{\text{ツテ}}}}{\boxed{\text{ト}}}$$

であり，四角形 ABRQ の面積は

$$\frac{\boxed{\text{ナニ}}\sqrt{\boxed{\text{ヌ}}}}{\boxed{\text{ネノ}}}$$

である．また，2 直線 AR と BQ の交点を C とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{1}{\boxed{\text{ハヒ}}}\left(-\boxed{\text{フ}}\vec{p}+\boxed{\text{ヘホ}}\vec{q}\right)$$

である．