2007 大学入試センター追試験問題　数学Ⅱ・数学B（60 分）

第１問（必答問題）（配点　30）

〔1〕　p，q は実数で，$p>0$，$p \neq 1$ とする．x の方程式

$$5p^x - \frac{1}{p^x} = q\left(p^x + \frac{1}{p^x}\right)$$

を考える．

(1)　与えられた方程式が解をもつような q の範囲を求めよう．

与えられた方程式を変形すると

$$p^{\boxed{ア}x}\left(\boxed{イ} - q\right) = \boxed{ウ} + q$$

となる．この方程式が解をもつのは $\boxed{イ} - q$ と $\boxed{ウ} + q$ が同符号のときであるから，求める範囲は

$$\boxed{エオ} < q < \boxed{カ}$$

である．

(2)　$p=3$，$q=\dfrac{1}{2}$ のとき，$p^x = \dfrac{\sqrt{\boxed{キ}}}{\boxed{ク}}$ であるから $x = \dfrac{\boxed{ケコ}}{\boxed{サ}}$ である．

〔2〕　座標平面上の原点 O を中心とし，半径 2 の円を S とする．円 S 上の 2 点 A，B を

$$\mathrm{A}(2\cos\theta,\ 2\sin\theta),\ \mathrm{B}\left(2\cos\left(\theta+\frac{2}{3}\pi\right),\ 2\sin\left(\theta+\frac{2}{3}\pi\right)\right)$$

とする．ただし，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする．

円 S 上の点 A，B における接線をそれぞれ ℓ，m とし，ℓ と m の交点を C とする．

(1)　線分 OC の長さは $\boxed{\text{シ}}$ であり，点 C の座標は

$$\left(\boxed{\text{ス}}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{\boxed{\text{セ}}}\right),\ \boxed{\text{ス}}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{\boxed{\text{セ}}}\right)\right)$$

である．

(2)　線分 AC の中点を P とし，直線 ℓ と x 軸の交点を Q とする．点 P の座標は

$$\left(\boxed{\text{ソ}}\cos\theta-\sqrt{\boxed{\text{タ}}}\sin\theta,\ \boxed{\text{ソ}}\sin\theta+\sqrt{\boxed{\text{タ}}}\cos\theta\right)$$

と表される．

三角形 OAC の面積が三角形 OQA の面積の 2 倍になるとき，点 P の座標は

$$\left(\frac{\sqrt{\boxed{\text{チ}}}}{\boxed{\text{ツ}}},\ \frac{\boxed{\text{テ}}\sqrt{\boxed{\text{トナ}}}}{\boxed{\text{ツ}}}\right)$$

である．

第２問（必答問題）（配点　30）

a を実数とし，x の関数 $f(x)$ を

$$f(x)=(x+1)\{x^2-(3a-2)x+2a(a-1)\}$$

とする．

(1)　座標平面上の点 P(−1，0) における曲線 $y=f(x)$ の接線 ℓ の方程式は

$$y=\left(\boxed{\text{ア}}\,a^2+a-\boxed{\text{イ}}\right)(x+1)$$

である．

x の関数 $g(x)$ を

$$g(x)=\left(\boxed{\text{ア}}\,a^2+a-\boxed{\text{イ}}\right)(x+1)-f(x)$$

とすると，$g(x)$ の極大値は

$a<\boxed{\text{ウ}}$　のとき　$\boxed{\text{エ}}$

$a>\boxed{\text{ウ}}$　のとき　$\boxed{\text{オ}}\,a^{\boxed{\text{カ}}}$

である．

(2)　曲線 $y=f(x)$ と x 軸との共有点の座標は

$$(-1,\ 0),\ \left(\boxed{\text{キ}},\ 0\right),\ \left(\boxed{\text{クケ}}-\boxed{\text{コ}},\ 0\right)$$

である．以下では，これらの共有点は異なる 3 点であるとする．

x 軸上において，点(−1，0) が他の二つの点の間にあるような a の範囲は

$$\boxed{\text{サシ}}<a<\frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}$$

である．

また，点$\left(\boxed{\text{キ}},\ 0\right)$と点 P(−1，0) を通り，P における接線が ℓ となるような放物線の方程式を $y=h(x)$ とすると

$$h(x)=\left(\boxed{\text{ソ}}-\boxed{\text{タチ}}\right)(x+1)\left(x-\boxed{\text{キ}}\right)$$

である．さらに，定積分

$$I=\int_{-1}^{0}h(x)dx$$

の値は

$$I=-\frac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}}\left(\boxed{\text{ソ}}-\boxed{\text{タチ}}\right)\left(\boxed{\text{トナ}}+\boxed{\text{ニ}}\right)$$

である．

第３問（選択問題）（配点　20）

$\{a_n\}$を初項a，公差dの等差数列とし，$\{b_n\}$を初項a，公比rの等比数列とする．ただし，$a \fallingdotseq 0$，$r \fallingdotseq 1$とする．

(1)　$a_5 = b_2$とすると

$$d = \frac{a\left(r - \boxed{\text{ア}}\right)}{\boxed{\text{イ}}}$$

である．さらに，$a_{17} = b_3$とすると

$$r = \boxed{\text{ウ}}\,,\ d = \frac{a}{\boxed{\text{エ}}}$$

となる．このとき，$a_m = b_n$となるmはnを用いて

$$m = \boxed{\text{オ}} \cdot \boxed{\text{カ}}^{n-1} - \boxed{\text{キ}}$$

と表される．

(2)　$c_n = \boxed{\text{オ}} \cdot \boxed{\text{カ}}^{n-1} - \boxed{\text{キ}}$とおく．このとき，数列$\{c_n\}$は漸化式

$$c_{n+1} = \boxed{\text{ク}}\,c_n + \boxed{\text{ケ}} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

を満たす．pを実数とし，$p \fallingdotseq 0$とする．数列$\{d_n\}$を

$$d_n = pc_n{}^2 + \boxed{\text{ク}}\,c_n + \boxed{\text{ケ}}$$

により定めるとき，$\{d_n\}$の階差数列が等比数列であるとする．このとき

$$p = \frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$$

である．また，数列$\{d_n\}$の初項から第n項までの和S_nは

$$S_n = \frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}\left(\boxed{\text{セ}}^{n} - \boxed{\text{ソ}}\right) + \frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}n$$

である．

第４問（選択問題）（配点　20）

三角形ABCの3辺の長さがそれぞれAB＝3，BC＝a，CA＝6であるとする．点Pは

$$a\overrightarrow{\mathrm{PA}}+6\overrightarrow{\mathrm{PB}}+3\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\vec{0}$$

を満たすとする．また，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{x}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{y}$ とおく．

(1)　直線APと直線BCの交点をDとする．$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ を $\vec{x}$ と $\vec{y}$ を用いて表すと，それぞれ

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}+\boxed{\text{ウ}}}\vec{x}+\frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{イ}}+\boxed{\text{ウ}}}\vec{y}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}\vec{x}+\frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{カ}}}\vec{y}$$

となる．（$\boxed{\text{イ}}$ と $\boxed{\text{ウ}}$ は解答の順序を問わない．）

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ と $\vec{x}$ の内積を求めよう．(1)より

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\vec{x}=\boxed{\text{ク}}+\frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{カ}}}\vec{x}\cdot\vec{y}$$

である．また，余弦定理を用いると

$$\vec{x}\cdot\vec{y}=\frac{\boxed{\text{ケコ}}-a^2}{\boxed{\text{サ}}}$$

であるから，求める内積は

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\vec{x}=\frac{\boxed{\text{シス}}-a^2}{\boxed{\text{セ}}}$$

である．

(3)　AD＝2のとき，$a=\boxed{\text{ソ}}\sqrt{\boxed{\text{タ}}}$ である．このとき，点Pから直線ABに下した垂線と直線ABとの交点をHとする．$\overrightarrow{\mathrm{PH}}$ を $\vec{x}$ と $\vec{y}$ で表そう．

$\overrightarrow{\mathrm{PH}}\cdot\vec{x}=\boxed{\text{チ}}$ であるから，実数 t を用いて $\overrightarrow{\mathrm{AH}}=t\vec{x}$ と表したとき

$$t=\frac{\boxed{\text{ツ}}-\sqrt{\boxed{\text{テ}}}}{\boxed{\text{ト}}}$$

である．したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{PH}}=\frac{\sqrt{\boxed{\text{ナ}}}-\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}\vec{x}+\frac{\sqrt{\boxed{\text{ネ}}}-\boxed{\text{ノ}}}{\boxed{\text{ハ}}}\vec{y}$$

である．