2007 大学入試センター試験問題　数学Ｉ・数学Ａ（60 分）（全問必答）

第１問（配点　20）

〔1〕　方程式

$$2(x-2)^2 = |3x-5| \qquad \cdots\cdots ①$$

を考える．

(1)　方程式①の解のうち，$x < \dfrac{5}{3}$ を満たす解は

$$x = \boxed{\text{ア}},\ \dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$$

である．

(2)　方程式①の解は全部で $\boxed{\text{エ}}$ 個ある．その解のうちで最大のものを α とすると，$m \leqq \alpha < m+1$ を満たす整数 m は $\boxed{\text{オ}}$ である．

〔2〕 集合 A，B を

$A=\{n \mid n$ は 10 で割り切れる自然数$\}$

$B=\{n \mid n$ は 4 で割り切れる自然数$\}$

とする.

(1) 次の $\boxed{\text{カ}}$ と $\boxed{\text{キ}}$ に当てはまるものを，下の⓪～③のうちから一つずつ選べ.

自然数 n が A に属することは，n が 2 で割り切れるための $\boxed{\text{カ}}$.

自然数 n が B に属することは，n が 20 で割り切れるための $\boxed{\text{キ}}$.

⓪ 必要十分条件である

① 必要条件であるが，十分条件でない

② 十分条件であるが，必要条件でない

③ 必要条件でも十分条件でもない

(2) 次の $\boxed{\text{ク}}$ ～ $\boxed{\text{コ}}$ に当てはまるものを，下の⓪～⑦のうちから一つずつ選べ.

$C=\{n \mid n$ は 10 と 4 のいずれでも割り切れる自然数$\}$

$D=\{n \mid n$ は 10 でも 4 でも割り切れない自然数$\}$

$E=\{n \mid n$ は 20 で割り切れない自然数$\}$

とする．自然数全体の集合を全体集合とし，その部分集合 G の補集合を $\overline{G}$ で表すとき

$C=\boxed{\text{ク}}$，$D=\boxed{\text{ケ}}$，$E=\boxed{\text{コ}}$

である.

⓪ $A\cup B$　① $A\cup\overline{B}$　② $\overline{A}\cup B$　③ $\overline{A\cup B}$

④ $A\cap B$　⑤ $A\cap\overline{B}$　⑥ $\overline{A}\cap B$　⑦ $\overline{A\cap B}$

第２問（配点　25）

a を定数とし，x の 2 次関数

$$y = x^2 - 2(a-1)x + 2a^2 - 8a + 4 \qquad \cdots\cdots ①$$

のグラフを G とする．

(1)　グラフ G が表す放物線の頂点の座標は

$$\left(a - \boxed{\text{ア}},\ a^2 - \boxed{\text{イ}}\,a + \boxed{\text{ウ}}\right)$$

である．グラフ G が x 軸と異なる 2 点で交わるのは

$$\boxed{\text{エ}} - \sqrt{\boxed{\text{オ}}} < a < \boxed{\text{エ}} + \sqrt{\boxed{\text{オ}}}$$

のときである．さらに，この二つの交点がともに x 軸の負の部分にあるのは

$$\boxed{\text{カ}} - \sqrt{\boxed{\text{キ}}} < a < \boxed{\text{ク}} - \sqrt{\boxed{\text{ケ}}}$$

のときである．

(2)　グラフ G が表す放物線の頂点の x 座標が 3 以上 7 以下の範囲にあるとする．
このとき，a の値の範囲は

$$\boxed{\text{コ}} \leqq a \leqq \boxed{\text{サ}}$$

であり，2 次関数①の $3 \leqq x \leqq 7$ における最大値 M は

$\boxed{\text{コ}} \leqq a \leqq \boxed{\text{シ}}$ のとき

$$M = \boxed{\text{ス}}\,a^2 - \boxed{\text{セソ}}\,a + \boxed{\text{タチ}}$$

$\boxed{\text{シ}} \leqq a \leqq \boxed{\text{サ}}$ のとき

$$M = \boxed{\text{ツ}}\,a^2 - \boxed{\text{テト}}\,a + \boxed{\text{ナニ}}$$

である．

したがって，2 次関数①の $3 \leqq x \leqq 7$ における最小値が 6 であるならば

$$a = \boxed{\text{ヌ}} + \boxed{\text{ネ}}\sqrt{\boxed{\text{ノ}}}$$

であり，最大値 M は

$$M = \boxed{\text{ハヒ}} - \boxed{\text{フ}}\sqrt{\boxed{\text{ヘ}}}$$

である．

第３問（配点　30）

△ABC において，AB＝2，BC＝$\sqrt{5}+1$，CA＝$2\sqrt{2}$ とする．また，△ABC の外接円の中心を O とする．

(1)　このとき，∠ABC＝$\boxed{\text{イウ}}$°であり，外接円 O の半径は

$$\frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}\sqrt{\boxed{\text{オ}}}$$

である．

(2)　円 O の円周上に点 D を，直線 AC に関して点 B と反対側の弧の上にとる．△ABD の面積を S_1，△BCD の面積を S_2 とするとき

$$\frac{S_1}{S_2}=\sqrt{5}-1 \qquad \cdots\cdots①$$

であるとする．∠BAD＋∠BCD＝$\boxed{\text{カキク}}$°であるから

$$\text{CD}=\frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}\text{AD}$$

となる．このとき

$$\text{CD}=\frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}\sqrt{\boxed{\text{スセ}}}$$

である．

さらに，2 辺 AD，BC の延長の交点を E とし，△ABE の面積を S_3，△CDE の面積を S_4 とする．このとき

$$\frac{S_3}{S_4}=\frac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}} \qquad \cdots\cdots②$$

である．①と②より

$$\frac{S_2}{S_4}=\frac{\sqrt{\boxed{\text{チ}}}}{\boxed{\text{ツ}}}$$

となる．

第４問（配点　25）

１辺の長さ１の正六角形があり，その頂点の一つをＡとする．一つのさいころを３回投げ，点Ｐを次の(ａ),(ｂ),(ｃ)にしたがって，この正六角形の辺上を反時計回りに進める．

(ａ)　頂点Ａから出発して，１回目に出た目の数の長さだけ点Ｐを進める．
(ｂ)　１回目で点Ｐがとまった位置から出発して，２回目に出た目の数の長さだけ点Ｐを進める．
(ｃ)　２回目で点Ｐがとまった位置から出発して，３回目に出た目の数の長さだけ点Ｐを進める．

(1)　３回進めたとき，点Ｐが正六角形の辺上を１周して，ちょうど頂点Ａに到達する目の出方は $\boxed{\text{アイ}}$ 通りである．

３回進める間に,点Ｐが１回も頂点Ａにとまらない目の出方は $\boxed{\text{ウエオ}}$ 通りである．

(2)　３回進める間に，点Ｐが３回とも頂点Ａにとまる確率は $\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キクケ}}}$ であり，ちょうど２回だけ頂点Ａにとまる確率は $\dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サシ}}}$ である．

３回進める間に，点Ｐがちょうど１回だけ頂点Ａにとまる確率は $\dfrac{\boxed{\text{スセ}}}{\boxed{\text{ソタ}}}$ である．

(3)　３回進める間に，点Ｐが頂点Ａにとまる回数の期待値は $\dfrac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$ 回である．