高校Ⅱ年数学B2学期期末考査 ＿＿組＿＿番氏名 解答 (20/12/14)

1 数学用語を漢字でかけ。各2. 8

(1) ばいかいへんすう

媒介変数

(2) だえん

楕円

(3) すいせん

垂線

(4) きせき

軌跡

2 動点 $P:(x,y)$ に対して P から y 軸に下した「すいせん」の足を H とする。また $F:(2,0)$ とする。次の問いに答えよ。

3 (1) PF を x と y の式で表せ。 11

$PF=\sqrt{(x-2)^2+y^2}$

4 (2) $\frac{PF}{PH}=1$ のとき動点 P の「きせき」を求めよ。

$\frac{PF^2}{PH^2}=1$

$\frac{(x-2)^2+y^2}{x^2}=1$ 2

$x^2-4x+4+y^2=x^2$

$y^2=4x-4$

答 $y^2=$ $4x-4$

4 (3) $\frac{PF}{PH}=\frac{1}{3}$ のとき動点 P の「きせき」を求めよ。

$\frac{PF^2}{PH^2}=\frac{1}{9}$

$\frac{(x-2)^2+y^2}{x^2}=\frac{1}{9}$

$9(x-2)^2+9y^2=x^2$ 2

$9(x^2-4x+4)+9y^2-x^2=0$

$8x^2-36x+36+9y^2=0$

式 $\boxed{ア}x^2+\boxed{イ}x+\boxed{ウ}y^2+\boxed{エ}=0$

答ア 8 イ -36 ウ 9 エ 36

3 次の「ばいかいへんすう」表示された図形はどのような図形になるか。図形の名称を記号で答えよ。各3 15

ア:直線　イ:円　ウ:「だえん」　エ:放物線　オ:双曲線

(1) $x=\cos\theta, y=\sin\theta$

$x^2+y^2=1$ より

イ

(2) $x=3\cos\theta, y=2\sin\theta$

$\frac{x}{3}=\cos\theta$ $\frac{y}{2}=\sin\theta$

$(\frac{x}{3})^2+(\frac{y}{2})^2=1$ より

ウ

(3) $x=2t, y=3t+2$

$t=\frac{x}{2}$

$y=3\cdot\frac{x}{2}+2=\frac{3}{2}x+2$ より

ア

(4) $x=4\cos\theta+1, y=3\sin\theta-1$

$x-1=4\cos\theta$ $y+1=3\sin\theta$

$\cos\theta=\frac{x-1}{4}$ $\sin\theta=\frac{y+1}{3}$

$\frac{(x-1)^2}{16}+\frac{(y+1)^2}{9}=1$ より

ウ

(5) $x=2t, y=3t^2+2$

$t=\frac{x}{2}$

$y=3\cdot(\frac{x}{2})^2+2$

$y=\frac{3}{4}x^2+2$ より

エ

4 次の文字式を求めよ。各4 12

(1) 直線 $y=ax+b$ の x 切片

$y=0$ で

$ax+b=0$

$x=-\frac{b}{a}$

$-\frac{b}{a}$

(2) 直線 $px+qy+r=0$ の傾き

$qy=-px-r$

$y=-\frac{p}{q}x-\frac{r}{q}$

$-\frac{p}{q}$

(3) 放物線 $y=ax^2$ と傾き $-b$, y 切片 $-c$ の直線との交点の x 座標を2つ求めよ。ただし $b^2-4ac>0$ とする。

$\begin{cases} y=ax^2 \\ y=-bx-c \end{cases}$

y 消去して

$ax^2+bx+c=0$ 2

$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

5 直線の式を求めよ。各4 16

(1) 傾き -3 点 $(-2,3)$ を通る直線

$y-3=-3(x+2)$

$y=-3x-6+3$

$3x+y+3=0$

式 $\boxed{ア}x+\boxed{イ}y+\boxed{ウ}=0$

答 ア 3 イ 1 ウ 3

(2)2 点 $(3,-2),(4,1)$ を通る直線

$y-1=\frac{-2-1}{3-4}(x-4)$

式 $\boxed{ア}x+\boxed{イ}y+\boxed{ウ}=0$

答 ア 3 イ -1 ウ -11

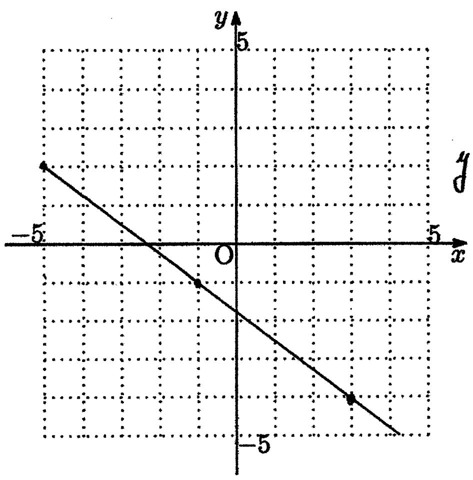
(3)x 切片が $\frac{3}{2}$, y 切片が $-\frac{5}{4}$ の直線

$\frac{x}{\frac{3}{2}}+\frac{y}{-\frac{5}{4}}=1$

式 $\boxed{ア}x+\boxed{イ}y+\boxed{ウ}=0$

答 ア 10 イ -12 ウ -15

(4)



傾き $-\frac{3}{4}$

$y+1=-\frac{3}{4}(x+1)$

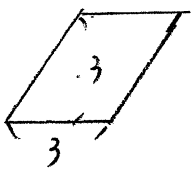
式 $\boxed{ア}x+\boxed{イ}y+\boxed{ウ}=0$

答 ア 3 イ 4 ウ 7

6 面積を求めよ。

(1)4 点 $(-2,-1),(1,-1),(4,2),(1,2)$ でできる四角形

4



底辺3 高さ3の

平行四辺形だから

$3\times3=9$

5

(2)3 直線 $y=\frac{1}{3}x+2, y=-x-2, y=3x-6$ でできる三角形

$(-3,1)\to(-6,-2)$

$(1,-3)\to(-2,-6)$

$(3,3)\to(0,0)$

$S=\frac{1}{2}|36-4|$

$=\frac{1}{2}\ 32$

$=16.$

7 次の値を求めよ。各4 20

(1) 直線 $2x+5y-41=0$ の傾き

$5y=-2x+41$

$y=-\frac{2}{5}x+\frac{41}{5}$

$-\frac{2}{5}$

(2) 直線 $5x+3y-42=0$ の y 切片

$x=0$ で $3y-42=0$

$y=14$

14

(3) 直線 $2x+5y-4=0$ の x 切片

$y=0$ で $2x-4=0$

$x=2$

2

(4) 原点と直線 $3x+4y+5=0$ の距離

$\frac{|3\cdot0+4\cdot0+5|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{5}{5}=1$

(5) 点 $(2,1)$ と直線 $2x-3y=10$の距離

$\frac{|2\cdot2-3\cdot1-10|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}=\frac{|4-3-10|}{\sqrt{13}}=\frac{9}{\sqrt{13}}$

$=\frac{9}{13}\sqrt{13}$

8 放物線 $y=x^2-2tx+2t^2\cdots$① について答えよ。

(1)①の頂点の座標を t を使って表せ。各3 9

$y=x^2-2tx+t^2+t^2$

$=(x-t)^2+t^2$

(t,t^2)

(2)t の値が変化するとき①の頂点の図形の名称を答えよ。

$x=t$

$y=t^2$ より $y=x^2$ の放物線

(3)①の頂点の図形の式を答えよ。

(2)より $y=x^2$

高校Ⅱ年数学Ⅱ２学期期末考査　４組＿＿番氏名 解答　(20/12/09)

1 不定積分を求めよ。ただし C を積分定数とする。　名3　24点

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

$= \int x^{-\frac{1}{2}}\,dx = 2x^{\frac{1}{2}} + C$

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{2x-3}\,dx$

$= \frac{1}{2}\log|2x-3| + C$

(3) $\displaystyle\int \frac{1}{x(x+1)}\,dx$

$= \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) dx$ ①

$= \log|x| - \log|x+1| + C$

(4) $\displaystyle\int \log x\,dx$

$= x\log x - \int x \cdot \frac{1}{x}\,dx$

$= x\log x - x + C$

(5) $\displaystyle\int 2^x\,dx$

$= \frac{1}{\log 2}\,2^x + C$

(6) $\displaystyle\int \cos x\,dx$

$= \sin x + C$

(7) $\displaystyle\int \sin^2 x\,dx$

$= \int \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$

①

(8) $\displaystyle\int xe^x\,dx$

$= xe^x - \int e^x\,dx$

$= xe^x - e^x + C$

2 $f(x) = e^{-x^2}$ について答えよ。　26点

② (1) $y = e^2$ を微分せよ。

$y' = 0$

③ (2) $f'(x)$ を求めよ。

$f'(x) = e^{-x^2} \cdot (-x^2)' = -2xe^{-x^2}$

③ (3) $f'(x) = 0$ のときの x の値を求めよ。

$-2xe^{-x^2} = 0$ のとき

$x = 0$

④ (4) $g(x) = xe^{-x^2}$ を微分せよ。

$g'(x) = e^{-x^2} + x \cdot (-2xe^{-x^2})$

$= e^{-x^2}(1-2x^2)$

④ (5) $f''(x) = 0$ のときの x の値を求めよ。

$f'(x) = -2g(x)$

$f''(x) = -2g'(x)$

$= -2e^{-x^2}(1-2x^2)$

$f''(x) = 0$ で $1-2x^2 = 0$

$x^2 = \frac{1}{2}$

$x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

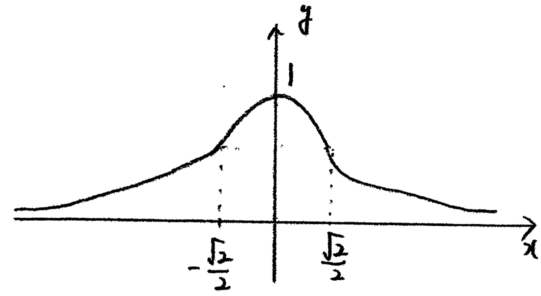
④ (6) 次の増減表の空所に値, 0, +, −, ↗, ↘, ↘, ↗ を埋めよ。

x	$\cdots$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	+	+	+	0	−	−	−
$f''(x)$	+	0	−	−	−	0	+
$f(x)$	↗	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	↗	1	↘	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	↘

④ (7) $f(x)$ のグラフをかけ。

$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}} = f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$f(0) = e^0 = 1$



② (8) 空欄に当てはまる漢字１字をかけ。

関数 $f(x)$ は y 軸に関して対称なので $\boxed{}$ 関数という。

偶

3 次の問いに答えよ。 12点

③ (1) 点 $(2,8)$ と直線 $3x-2y+4=0$ の距離を求めよ。

$\dfrac{|2\cdot3-2\cdot8+4|}{\sqrt{3^2+(-2)^2}} = \dfrac{6}{\sqrt{13}} = \dfrac{6}{13}\sqrt{13}$

④ (2) 放物線 $y=ax^2$ と傾き $-b$, y 切片 $-c$ の直線との交点の x 座標を 2 つ求めよ。ただし $b^2-4ac>0$ とする。

$\begin{cases} y=ax^2 \\ y=-bx-c \end{cases}$ $ax^2+bx+c=0$ ②

$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

⑤ (3) 次の領域の面積を求めよ。$\begin{cases} 3x-5y \geqq -16 \\ 3x-y \leqq 4 \\ x+y \geqq 0 \end{cases}$

$3x-5y=-16$
$-)\ 3x-y=4$
$-4y=-20$
$y=5$
$3x-5=4$
$x=3$
$(3,5)$ ①

$3x-y=4$
$+)\ x+y=0$
$4x=4$
$x=1$
$y=-1$
$(1,-1)$ ①

$3x-5y=-16$
$-)\ 3x+3y=0$
$-8y=-16$
$y=2$
$x=-2$
$(-2,2)$ ①

$(1,-1)\to(0,0)$
$(3,5)\to(2,6)$
$(-2,2)\to(-3,3)$

$\frac{1}{2}|2\times3-6\times(-3)|$
$=\frac{1}{2}|6+18|=\frac{24}{2}=12$

4 直線の式を求めよ。 15点

③ (1) 傾き 3，点 $(2,8)$ を通る直線

$y-8=3(x-2)$
$y=3x-6+8$
$y=3x+2$

④ (2) 2 点 $(3,-5),(-7,2)$ を通る直線

$y-2=\dfrac{-5-2}{3-(-7)}(x+7)$ $y=-\frac{7}{10}x-\frac{29}{10}$

$y-2=-\frac{7}{10}(x+7)$

④ (3) 直線 $4x+y-6=0$ と垂直で点 $(-3,5)$ を通る直線

$(x-(-3))-4(y-5)=0$
$x+3-4y+20=0$
$x-4y+23=0$ $y=\frac{1}{4}x+\frac{23}{4}$

④ (4) 直線 $x+2y-3=0$ と x 軸に関して対称な直線

yに$-y$を代入

$x-2y-3=0$

$y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$

5 値を求めよ。各4 16点

(1) $\displaystyle\int_0^1 x^{-\frac{2}{3}}\,dx$ $-\frac{2}{3}+1=\frac{1}{3}$

$=\left[3x^{\frac{1}{3}}\right]_0^1=3$

(2) $\displaystyle\int_3^4 \frac{1}{x(x-2)}\,dx$

$=\frac{1}{2}\int_3^4\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x}\right)dx$
$=\frac{1}{2}\left[\log|x-2|-\log x\right]_3^4$ $\frac{1}{2}\log\frac{3}{2}$
$=\frac{1}{2}\left[\log\frac{x-2}{x}\right]_3^4=\frac{1}{2}\left(\log\frac{1}{2}-\log\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}(\log3-\log2)$

(3) $\displaystyle\int_1^3 2^x\,dx$

$=\left[\frac{1}{\log2}2^x\right]_1^3=\frac{1}{\log2}(8-2)=\frac{6}{\log2}$

(4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$

$=\left[-\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=0+1=1$

6 次の問いに答えよ。 7点

③ (1) 積和の公式をかけ。

$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$

④ (2) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\pi}\sin4x\cos x\,dx$ を求めよ。

$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(\sin5x+\sin3x)\,dx$
$=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{5}\cos5x-\frac{1}{3}\cos3x\right]_0^{\pi}$ ②
$=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{5}(-1)-\frac{1}{3}(-1)-\left\{\left(-\frac{1}{5}\right)-\frac{1}{3}\right\}\right]=\frac{1}{5}+\frac{1}{3}$
$=\frac{8}{15}$

高校Ⅱ年数学Ⅱ２学期期末考査　５組＿＿番氏名　解答　(20/12/09)

1 次の定積分を A ～ C 君が解いた。次の問いに答えよ。　各3　27点

$$\int_5^6 x\sqrt{6-x}\,dx \cdots ①$$

A 君の解答　$t=6-x$ とおく。

(1) t を x で微分せよ。

$\frac{dt}{dx}=-1$　　　$x=6-t$

(2) ①を t の積分で表せ。

x	$5 \cdots 6$
t	$1 \cdots 0$

$$①=\int_1^0 (6-t)\sqrt{t}\cdot(-dt) = \int_0^1 (6-t)\sqrt{t}\,dt$$

(3) $\int_0^1 t\sqrt{t}\,dt$ を求めよ。

$$\int_0^1 t^{\frac{3}{2}}\,dt = \left[\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{5}$$

B 君の解答　$s=\sqrt{6-x}$ とおく。

(4) x を s の式で表せ。

$s^2=6-x$
$x=6-s^2$

(5) $\frac{dx}{ds}$ を s の式で表せ。

$\frac{dx}{ds}=-2s$　　　$dx=-2s\,ds$

(6) ①を s の積分で表せ。

$$①=\int_1^0 (6-s^2)\cdot s\cdot(-2s\,ds) = 2\int_0^1 (6-s^2)s^2\,ds$$

x	$5 \cdots 6$
s	$1 \cdots 0$

(7) $\int_0^1 6s^2\,ds$ を求めよ。

$$\int_0^1 6s^2\,ds = \left[6\cdot\frac{1}{3}s^3\right]_0^1 = 2$$

C 君の解答　部分積分を利用する。

$$① = \int_5^6 xf'(x)\,dx = \Big[xf(x)\Big]_5^6 + \frac{2}{3}\int_5^6 (ax+b)^{\frac{3}{2}}\,dx$$

(8) $f(x)$ に相当する式と a,b の値を求めよ。

$f(x) = -\frac{2}{3}(6-x)^{\frac{3}{2}}$

$a=-1,\quad b=6$

A ～ C 君の解答

(9) ①の値を求めよ。

(6)より　$2\int_0^1 (6s^2-s^4)\,dx$

$= 2\left[6\cdot\frac{1}{3}s^3 - \frac{1}{5}s^5\right]_0^1$

$= 2\left(2-\frac{1}{5}\right) = \frac{18}{5}$

2 $f(x)=e^{-x^2}$ について答えよ。　26点

② (1) $y=e^2$ を微分せよ。

$y'=0$

③ (2) $f'(x)$ を求めよ。

$f'(x) = e^{-x^2}\cdot(-x^2)' = -2xe^{-x^2}$

③ (3) $f'(x)=0$ のときの x の値を求めよ。

$-2xe^{-x^2}=0$　のとき
$x=0$

④ (4) $g(x)=xe^{-x^2}$ を微分せよ。

$g'(x) = e^{-x^2} + x\cdot -2xe^{-x^2}$
$= e^{-x^2}(1-2x^2)$

④ (5) $f''(x)=0$ のときの x の値を求めよ。

$f'(x) = -2g(x)$
$f''(x) = -2g'(x)$
$= -2(1-2x^2)e^{-x^2}$

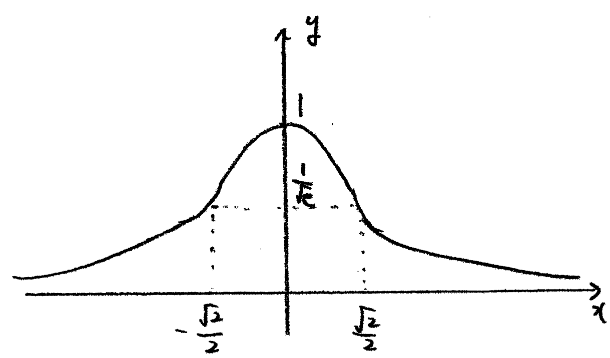
$f''(x)=0$ で $1-2x^2=0$
$x^2=\frac{1}{2}$
$x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

④ (6) 次の増減表の空所に値, 0, +, −, ↗, ↘, ↘, ↗ を埋めよ。

x	$\cdots$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	+	+	+	0	−	−	−
$f''(x)$	+	0	−	−	−	0	+
$f(x)$	↗	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	↗	1	↘	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	↘

④ (7) $f(x)$ のグラフをかけ。

$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}} = f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$



② (8) 空欄に当てはまる漢字 3 字をかけ。

関数 $f(x)$ は y 軸に関して対称なので $\boxed{}$ という。

偶関数

3 値を求めよ。 28点

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

$= \displaystyle\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}\,dx = 2\left[x^{\frac{1}{2}}\right]_0^1 = 2$

(2) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} \frac{1}{x^2+2}\,dx$

$x = \sqrt{2}\tan\theta$ とおく

$\dfrac{dx}{d\theta} = \sqrt{2}\cdot\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

$dx = \dfrac{\sqrt{2}}{\cos^2\theta}\,d\theta$

$= \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}\cdot\cancel{\frac{1}{\tan^2\theta+1}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\cos^2\theta}\,d\theta$

$= \dfrac{\sqrt{2}}{2}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta$

$= \dfrac{\sqrt{2}}{2}\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = \dfrac{\sqrt{2}}{8}\pi$

(3) $\displaystyle\int_3^4 \frac{1}{x(x-2)}\,dx$

$= \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_3^4 \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x}\right)dx$

$= \dfrac{1}{2}\Big[\log(x-2) - \log x\Big]_3^4 = \dfrac{1}{2}(\log 2 - \log 4 - \log 1 + \log 3)$

$= \dfrac{1}{2}(\log 3 - \log 2)$

(4) $\displaystyle\int_1^3 2^x\,dx$

$= \left[\dfrac{1}{\log 2}\,2^x\right]_1^3 = \dfrac{1}{\log 2}(8-2) = \dfrac{6}{\log 2}$

(5) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$

$= \Big[\sin x\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 1-(-1) = 2$

(6) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx$

$= \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 2x)\,dx$

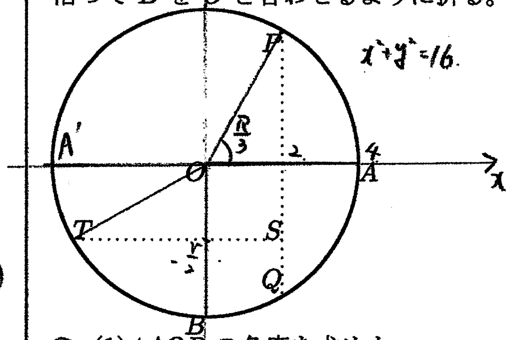
$= \dfrac{1}{2}\left[x - \dfrac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi}{4}$

(7) $\displaystyle\int_0^1 x3^x\,dx$

$= \left[x\cdot\dfrac{3^x}{\log 3}\right]_0^1 - \dfrac{1}{\log 3}\displaystyle\int_0^1 3^x\,dx$

$= \dfrac{3}{\log 3} - \dfrac{1}{\log 3}\left[\dfrac{1}{\log 3}\cdot 3^x\right]_0^1 = \dfrac{3}{\log 3} - \dfrac{2}{(\log 3)^2}$

4 中心 O 半径 r の円に $\angle AOB$ が $90°$ になるように点をとり，点線に沿って A を O と合わせるように折る。さらに点線に沿って B を O と合わせるように折る。次の問いに答えよ。 19点



3 (1) $\angle AOP$ の角度を求めよ。

$\dfrac{\pi}{3}$

6 (2) $r=4$ のとき 1 回折ってできる図形の面積を求めよ。

$2\displaystyle\int_2^4 \sqrt{16-x^2}\,dx$

$x = 4\cos\theta$ とおく

$\dfrac{dx}{d\theta} = -4\sin\theta$

$dx = -4\sin\theta\,d\theta$

x	$2 \cdots 4$
θ	$\frac{\pi}{3} \cdots 0$

$= 2\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^0 4\sin\theta\cdot -4\sin\theta\,d\theta$

$= 32\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2\theta\,d\theta$

$= 16\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} (1-\cos 2\theta)\,d\theta$

$= 16\left[\theta - \dfrac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$

$= 16\left(\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= \dfrac{16}{3}\pi - 4\sqrt{3}$

$16\pi - \left(\dfrac{16}{3}\pi - 4\right.$

$= \dfrac{32}{3}\pi + 4\sqrt{3}$

10 (3) 2 回折ってできる扇形状の図形 SPT の面積を r で表せ。

$\displaystyle\int_{-r}^{\frac{1}{2}r} \sqrt{r^2-x^2}\,dx + \int_{-\frac{1}{2}r}^{0} \sqrt{r^2-y^2}\,dy + \left(\frac{1}{2}r\right)^2$

$= \displaystyle\int_{-r}^0 \sqrt{r^2-x^2}\,dx + \int_0^{\frac{1}{2}r} \sqrt{r^2-x^2}\,dx + \int_{-\frac{1}{2}r}^0 \sqrt{r^2-y^2}\,dy + \frac{1}{4}r^2$

$-y = p \qquad dy = -dp$

y	$-\frac{1}{2}r \cdots 0$
p	$\frac{1}{2}r \cdots 0$

$= \displaystyle\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}\,dx + \int_0^{\frac{1}{2}r} \sqrt{r^2-x^2}\,dx + \int_{\frac{1}{2}r}^0 \sqrt{r^2-p^2}\,(-dp) + \frac{1}{4}r^2$

$= \displaystyle\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}\,dx + 2\int_0^{\frac{1}{2}r} \sqrt{r^2-x^2}\,dx + \frac{1}{4}r^2$

$x = r\cos\theta \qquad \dfrac{dx}{d\theta} = -r\sin\theta$

x	$0 \cdots \frac{1}{2}r \cdots r$
θ	$\frac{\pi}{2} \cdots \frac{\pi}{3} \cdots 0$

$= \displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^0 -r^2\sin^2\theta\,d\theta + 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} -r^2\sin^2\theta\,d\theta + \frac{1}{4}r^2$

$= \left[\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\,d\theta + 2\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\,d\theta + \frac{1}{4}\right]\times r^2$

$= \left\{\left[\dfrac{1}{2}\theta - \dfrac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + 2\left[\dfrac{1}{2}\theta - \dfrac{1}{4}\sin 2\theta\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} + \dfrac{1}{4}\right\}r^2$

$= \left\{\dfrac{\pi}{4} + 2\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\sqrt{3}}{8}\right) + \dfrac{1}{4}\right\}r^2$

$= \left(\dfrac{5}{12}\pi + \dfrac{\sqrt{3}}{4} + \dfrac{1}{4}\right)r^2$