高校Ⅰ年数学Ａ１学期期末考査 ＿＿組＿＿番氏名 解答 (19/07/03)

1 公式を書け。(9 点)

(1) $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$

(2) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

(3) $\sum_{k=1}^{n} c = nc$

2 一般項を求めよ。(17 点)

③ (1) 初項 8 公差 4 の等差数列

$a_n = 8 + (n-1)\times 4$
$= 8 + 4n - 4$
$\underline{a_n = 4n+4}$

③ (2) 初項 3 公比 $-\frac{1}{2}$ の等比数列

$\underline{a_n = 3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$

③ (3) $\{a_n\}: 1, 6, 11, 16, 21, \cdots$

初項1 公差 5 の等差数列より

$a_n = 1 + (n-1)\times 5$
$\underline{a_n = 5n-4}$

④ (4) $a_1 = 47, \quad a_{n+1} = a_n - 13$

初項47 公差 −13の等差数列より

$a_n = 47 + (n-1)\times(-13)$
$\underline{a_n = -13n+60}$

④ (5) $S_n = n^2 + n$

$a_n = n^2 + n - \{(n-1)^2 + (n-1)\}$
$= n^2 + n - (n^2 - 2n + 1) - n + 1 = 2n$
$\underline{a_n = 2n}$

3 第 5 項まで列挙せよ。(17 点)

③ (1) 初項 2 公比 3 の等比数列

$\{a_n\}: 2, 6, 18, 54, 162, \cdots$

③ (2) 初項 −1 公差 3 の等差数列

$\{a_n\}: -1, 2, 5, 8, 11, \cdots$

③ (3) $a_n = 2n - 3$

$\{a_n\}: -1, 1, 3, 5, 7, \cdots$

④ (4) $a_1 = 7, \quad a_{n+1} + a_n = 8$

$\{a_n\}: 7, 1, 7, 1, 7, \cdots$ となりどうし足して8になる

④ (5) $a_{n+1} = -2a_n + 6, \quad a_1 = 1$

$\{a_n\}: 1, 4, -2, 10, -14, \cdots$ −2倍して 6を足す

4 次の数列の第 7 項までの和を求めよ。(17 点)

③ (1) $S_n = 2n + 3$

$n=7$で $S_7 = 2\times 7 + 3 = \underline{17}$

③ (2) $\{a_n\}: -2, 2, 6, 10, 14, \cdots$

（差：4 4 4 4）

$-2+2+6+10+14+18+22 = \underline{70}$

③ (3) $\{a_n\}: 3, 5, 9, 17, 33, 65, \cdots 129$

（差：2 4 8 16 32 64）

$3+5+9+17+33+65+129 = \underline{261}$

④ (4) $a_n = -3n - 2$

$\{a_n\}: -5, -8, -11, -14, -17, -20, -23,$

$-(5+8+11+14+17+20+23)$
$= -\frac{1}{2}(5+23)\times 7 = \underline{-98}$

④ (5) 初項 40 公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列

$\{a_n\}$ $40, 20, 10, 5, \frac{5}{2}, \frac{5}{4}, \frac{5}{8}$

$40+20+10+5+\frac{5}{2}+\frac{5}{4}+\frac{5}{8} = \underline{\frac{635}{8}}$ (79.375)

5 次の数列の n 項までの和を求めよ。(17 点)

③ (1) 初項 10 公差 5 の等差数列

$a_n = 10 + (n-1)\times 5 = 5n+5$

$S_n = (10 + 5n + 5)\times\frac{1}{2}\times n = \underline{\frac{n}{2}(5n+15)}$ ②

③ (2) 初項 3 公比 2 の等比数列

$a_n = 3\cdot 2^{n-1}$

$S_n = \frac{3(2^n - 1)}{2-1}$ ② $= \underline{3\times 2^n - 3}$

③ (3) $\{a_n\}: 2, 10, 50, 250, \cdots$

初項 2 公比 5 より $a_n = 2\cdot 5^{n-1}$

$S_n = \frac{2(5^n - 1)}{5-1}$ ② $= \underline{\frac{5^n - 1}{2}}$

④ (4) $a_1 = 4, \quad a_{n+1} = 3a_n$

初項 4 公比 3 の等比数列より $a_n = 4\cdot 3^{n-1}$

$S_n = \frac{4(3^n - 1)}{3-1}$ ② $= \underline{2(3^n - 1)}$

④ (5) $a_n = n^3$

$\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \underline{\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2}$

6 漸化式 $a_{n+1}=5a_n+8,\quad a_1=-1$ で表される数列について次の問いに答えよ。(12 点)

(1)「漸化式」のよみがなをひらがなで書け。

②

ぜんかしき

(2) 方程式 $-x=-5x+8$ を解け。

①

$-x+5x=8$

$4x=8$

$x=2$

解を $x=\boxed{\text{A}}$ とする

(3) 特性方程式を作れ。

② $x=5x+8$

(4) 固有値を求めよ。

②

$x-5x=8$

$-4x=8$

$x=-2$

15+

(5) あてはまる数を埋めよ。

5倍して8足す

$\{a_n\}$ -1, 3, 23, 123

階差数列 $\{a_n+\boxed{\text{A}}\}$ を列挙すると

$\{a_n+\boxed{\text{A}}\}:1,\boxed{ア},\boxed{イ},\boxed{ウ},\cdots$

よって数列 $\{a_n+\boxed{\text{A}}\}$ は 初項 1 公比$\boxed{エ}$の等比数列である。

ア 5 イ 25 ウ 125 ② エ 5 ①

(6) 一般項を求めよ。

②

$a_n+2=1\cdot5^{n-1}$

$a_n=5^{n-1}-2$

7 数列 $\{a_n\}$ についてあてはまる係数や定数項を埋めよ。(11 点)

数列 $\{a_n\}:1,5,11,19,29,41,\cdots$

4 6 8 10 12

階差数列 $\{b_n\}$ を列挙すると

$\{b_n\}:4,\boxed{ア},8,10,12,\cdots$

階差数列 $\{b_n\}$ の一般項は $b_n=\boxed{イ}n+\boxed{ウ}$ である。

公式より $a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(\boxed{イ}k+\boxed{ウ})$

よって $a_n=\boxed{エ}n^2+\boxed{オ}n+\boxed{カ}$　$n=1$ も満たしている

ア 6 ③ イ 2 ウ 2 ④

エ 1 オ 1 カ −1 ④

初項 4、公差 2 の等差数列より

$b_n=4+(n-1)\times2$

$=4+2n-2$

$=2n+2$

$a_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}(2k+2)$

$=1+2\cdot\sum_{k=1}^{n-1}k+\sum_{k=1}^{n-1}2$

$=1+\cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}n(n-1)+2(n-1)$

$=1+n(n-1)+2n-2$

$=1+n^2-n+2n-2$

$=n^2+n-1$

高校Ⅰ年数学Ⅰ１学期期末考査　４組＿番氏名 解答 (19/07/08)

1 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ のとき $\frac{3a+2b}{b}=\frac{3c+2d}{d}$ を示せ。 6.

⑥ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$ とおく

$a=bk$ …①

$c=dk$ …②

① を左辺に代入

左辺 $=\frac{3bk+2b}{b}=3k+2$

② を右辺に代入

右辺 $=\frac{3dk+2d}{d}=3k+2$

よって 左辺=右辺

2 次の直線の式を求めよ。 21点

③ (1) 円 $x^2+y^2=20$ の点 $(4,-2)$ における接線

公式より $4x-2y=20$

$2x-y=10$

$y=2x-10$

④ (2) 傾き 3 で点 $(-4,1)$ を通る直線

$y-1=3(x-(-4))$

$y=3(x+4)+1$

$y=3x+12+1$

$y=3x+13$

④ (3) 点 $(1,2)$ を通り，直線 $3x+4y-8=0$ に垂直な直線

傾き $-\frac{3}{4}$ に垂直な傾きは $\frac{4}{3}$

求める直線は

$y-2=\frac{4}{3}(x-1)$

$y=\frac{4}{3}x-\frac{4}{3}+2$

$y=\frac{4}{3}x+\frac{2}{3}$

④ (4) 2 点 $(1,2),(4,-4)$ を通る直線

$y-2=\frac{2-(-4)}{1-4}(x-1)$

$y-2=\frac{6}{-3}(x-1)$

$y=-2(x-1)+2$

$y=-2x+2+2$

$y=-2x+4$

⑥ (5) 点 $(1,-7)$ から円 $x^2+y^2=25$ に引いた接線

接点 (p,q) とおく

接線 $px+qy=25$ …①

① が $(1,-7)$ を通るから

$p-7q=25$

$p=7q+25$ …②

(p,q) は円周上に存在しているので

$p^2+q^2=25$

$(7q+25)^2+q^2=25$

$49q^2+350q+625+q^2-25=0$

$50q^2+350q+600=0$

$q^2+7q+12=0$

$(q+4)(q+3)=0$

$q=-4,-3$ ③

$q=-4$ で $p=-3$

$q=-3$ で $p=4$

$-3x-4y=25$

$4x-3y=25$

3 $(a+b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})\geqq 4$ を示せ。 6点

⑥ 左辺 $=1+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+1$

$=2+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$

相加・相乗平均より

$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geqq 2\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}}=2$

$\geqq 2+2$

$\geqq 4$

よって示せた

4 次の円の式を求めよ。 21点

③ (1) 中心 $(3,-2)$ 半径 2 の円

$(x-3)^2+(y+2)^2=4$

④ (2) 中心 $(2,-1)$ で点 $(-1,1)$ を通る円

$(2,-1)$, $(-1,1)$ の距離

$\sqrt{\{2-(-1)\}^2+(-1-1)^2}=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$

$(x-2)^2+(y+1)^2=13$

半径間違い ⊖2

④ (3) 2 点 $(0,4),(3,0)$ を直径の両端とする円

$(0,4)$, $(3,0)$ の中点 $(\frac{3}{2},2)$

$(0,4)$, $(3,0)$ の距離 5　半径 $\frac{5}{2}$

$(x-\frac{3}{2})^2+(y-2)^2=\frac{25}{4}$ 半径間違い ⊖2

④ (4) 中心 $(-3,2)$ で y 軸と接する円

y 軸と接するので半径は $|-3|=3$

$(x+3)^2+(y-2)^2=9$

半径 2 と間違い ⊖3

⑥ (5) 3 点 $(4,-2),(-3,-1),(-2,6)$ を通る円

求める式 $x^2+y^2+px+qy+r=0$ …① とおく

① に $(4,-2)$ を代入して

$16+4+4p-2q+r=0$ …②

① に $(-3,-1)$ を代入して

$9+1-3p-q+r=0$ …③

① に $(-2,6)$ を代入して

$4+36-2p+6q+r=0$ …④ ④

②〜④ より

$p=-2,\ q=-4,\ r=-20$

$x^2+y^2-2x-4y-20=0$

5 次の値を求めよ。 25

(1) 2 点 $A:(1,-2), B:(-1,2)$ の距離

③

$\sqrt{\{1-(-1)\}^2+(-2-2)^2} = \sqrt{2^2+4^2} = \sqrt{4+16}$

$= 2\sqrt{5}$

④ (2) 原点と直線 $y=-x+5$ の距離

$(0,0)$ と $x+y-5=0$ の距離

$\dfrac{|-5|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \dfrac{5}{\sqrt{2}} = \underline{\dfrac{5}{2}\sqrt{2}}$

④ (3) 点 $(2,3)$ と直線 $3x+y-2=0$ の距離

$\dfrac{|3\cdot 2+3-2|}{\sqrt{3^2+1^2}} = \dfrac{7}{\sqrt{10}} = \underline{\dfrac{7}{10}\sqrt{10}}$

④ (4) 2 点 $A:(1,4), B:(-1,4)$ を通る直線の傾き

$\dfrac{4-4}{1-(-1)} = \underline{0}$

④ (5) 円 $x^2+y^2-4x+2y \quad =0$ の半径

$x^2-4x+4+y^2+2y+1 = 5$

$(x-2)^2+(y+1)^2 = \sqrt{5}^2$

より $\underline{\sqrt{5}}$

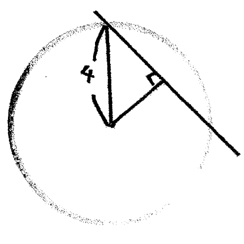
⑥ (6) 直線 $y=-2x+3$ が円 $x^2+y^2+2x+6y-6=0$ によって切り取られる長さ

$x^2+2x+y^2+6y=6$

$x^2+2x+1+y^2+6y+9 = 6+1+9$

$(x+1)^2+(y+3)^2 = 16$

中心 $(-1,-3)$ 半径 4 の円



$(-1,-3)$ と $2x+y-3=0$ の距離

$\dfrac{|-2-3-3|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \dfrac{8}{\sqrt{5}}$

求める長さ $2\sqrt{16-\dfrac{64}{5}}$

$= 2\cdot 4\sqrt{1-\dfrac{4}{5}}$

$= 2\cdot 4\cdot \dfrac{1}{\sqrt{5}} = \underline{\dfrac{8}{5}\sqrt{5}}$

6 次の座標を求めよ。 21

③ (1) 2 点 $A:(-3,5), B:(2,-1)$ の中点

$\left(\dfrac{-3+2}{2}, \dfrac{5-1}{2}\right) = \underline{\left(-\dfrac{1}{2}, 2\right)}$

④ (2) 2 点 $A:(-3,-2), B:(3,7)$ の線分 AB を $2:1$ に内分する点

A ② ① B

$(-3,-2)$ $(3,7)$

$\left(\dfrac{2\times 3+1\times(-3)}{2+1}, \dfrac{2\times 7+1\times(-2)}{2+1}\right)$

$= \left(\dfrac{3}{3}, \dfrac{12}{3}\right) = \underline{(1,4)}$

④ (3) 2 点 $A:(3,2), B:(-3,-7)$ の線分 AB を $2:1$ に外分する点

② ① A B

A ② ① B $(3,2)$ $(-3,-7)$

$\left(\dfrac{2\times(-3)+(-1)\times 3}{2-1}, \dfrac{2\times(-7)+(-1)\times 2}{2-1}\right) = (-6-3, -14-2)$

$= \underline{(-9,-16)}$

④ (4) 円 $x^2+y^2+6x-4y-3=0$ の中心

$x^2+6x+y^2-4y=3$

$x^2+6x+9+y^2-4y+4 = 3+9+4$

$(x+3)^2+(y-2)^2 = 16$

$(x+3)^2+(y-2)^2 = 4^2$

$\underline{中心\ (-3,2)}$

⑥ (5) 円 $x^2+y^2=20$ と直線 $3x-y-10=0$ の共有点

$y=3x-10$

$x^2+(3x-10)^2=20$

$x^2+9x^2-60x+100-20=0$

$10x^2-60x+80=0$

$x^2-6x+8=0$

$(x-2)(x-4)=0$

$x=2,4$ ③

$x=2$ のとき

$y=-4$

$x=4$ のとき

$y=2$

$\underline{(2,-4), (4,2)}$

高校Ⅰ年数学Ⅰ１学期期末考査　５組＿＿番氏名 解答 (19/07/08)

1 次の条件を満たす点の軌跡を求めよ。27点

⑤ (1) $\begin{cases} x=-m+1\cdots① \\ y=2m-3\cdots② \end{cases}$

①より $m=-x+1$

これを②に代入して

$y=2(-x+1)-3$

$y=-2x+2-3$

$\underline{y=-2x-1}$

⑤ (2) 放物線 $y=x^2-2tx+t$ の頂点

$y=x^2-2tx+t^2+t-t^2$

$=(x-t)^2-t^2+t$ ①

頂点 $(t,\ -t^2+t)$

$\begin{cases} x=t \\ y=-t^2+t \end{cases}$ ③ より　$\underline{y=-x^2+x}$

⑤ (3) 2 点 $A:(0,0), B:(4,0)$ からの距離の比が $3:1$ である点 P

$P:(x,y)$ とおく 1

$AP^2=x^2+y^2$

$BP^2=(x-4)^2+y^2$

$AP:BP=3:1$

$AP=3BP$

$AP^2=9BP^2$

$x^2+y^2=9(x-4)^2+9y^2$

$9(x-4)^2+9y^2-x^2-y^2=0$

$9(x^2-8x+16)+8y^2-x^2=0$

$8x^2-72x+9\times8\times2+8y^2=0$

$\underline{x^2-9x+18+y^2=0}$

⑥ (4) 点 Q が放物線 $y=x^2+2$ 上を動き 2 点 $A:(-2,-1), B:(2,-1)$ と点 Q を頂点とする $\triangle ABQ$ の重心 P

点 $Q\ (t,\ t^2+2)$ とおく 1

$A(-2,\ -1)$

$B(2,\ -1)$

$P:(x,y)=\left(\dfrac{t-2+2}{3}\quad \dfrac{t^2+2-1-1}{3}\right)$

$=\left(\dfrac{t}{3},\ \dfrac{t^2}{3}\right)$

$\begin{cases} x=\dfrac{t}{3} \\ y=\dfrac{t^2}{3} \end{cases}$ ③　$t=3x$

$y=\dfrac{1}{3}(3x)^2$

$\underline{y=3x^2}$

⑥ (5) 円 $x^2+y^2-2(a-1)x-4ay+4a^2+4=0$ の中心

$x^2-2(a-1)x+(a-1)^2+y^2-4ay+4a^2=-4+(a-1)^2$

$\{x-(a-1)\}^2+(y-2a)^2=a^2-2a+1-4$

$=a^2-2a-3$ ②

中心 $(a-1,\ 2a)$

$a^2-2a-3>0$

$(a-3)(a+1)>0$

$a<-1,\ 3<a$

$\begin{cases} x=a-1 \\ y=2a \end{cases}$ 3

$a=x+1$ を代入

$y=2(x+1)$

$\underline{y=2x+2}$

$x+1<-1\quad 3<x+1$

$x<-2,\quad x>2$

$\underline{(x<-2,\ x>2)}$

⑥ **2** $\frac{x+y}{3}=\frac{y+z}{4}=\frac{z+x}{5}$ のとき $x:y:z$ を求めよ。

与式 $=k$ とおく

$\begin{cases} x+y=3k & \cdots② \\ y+z=4k & \cdots③ \\ z+x=5k & \cdots④ \end{cases}$

これらを足して

$2(x+y+z)=12k$

$x+y+z=6k\cdots①$

①−②より

$z=3k$

①−③より

$x=2k$

①−④より

$y=k$

$\underline{x:y:z=2:1:3}$

⑥ **3** $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ のとき $\frac{3a+2b}{b}=\frac{3c+2d}{d}$ を示せ。

$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=k$ とおく

$a=bk$

$c=dk$

左辺 $=\dfrac{3bk+2b}{b}=3k+2$

右辺 $=\dfrac{3dk+2d}{d}=3k+2$

よって 左辺 = 右辺

4 次の条件を満たす領域の式を求めよ。8点

④ (1) 中心 $(2,0)$ 半径 2 の円の内部 (境界線を含む)

$(x-2)^2+y^2\leqq 2^2$

④ (2) x 切片 -1 , y 切片 2 の直線で区切られた左上の部分 (境界線を含まない)

$\dfrac{x}{-1}+\dfrac{y}{2}>1$

$\underline{y>2x+2}$

⑥ **5** $(a+b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}) \geqq 4$ を示せ。

左辺 $= 1 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 1$

$= 2 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$

相加・相乗平均より

$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqq 2\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}} = 2$

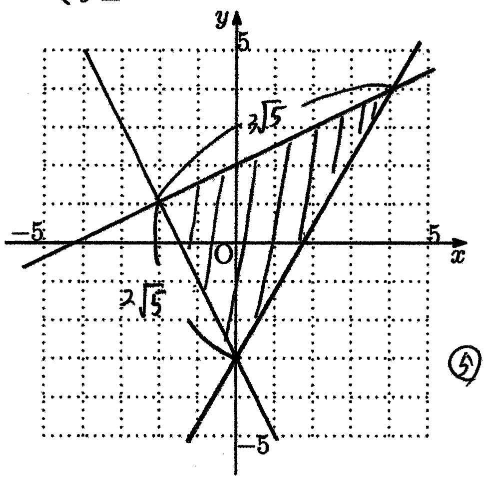
$\geqq 2+2$

$= 4$

よって示された。

6 次の領域を斜線部分で図示し、面積を求めよ。(境界線を含む) 円周率を π とし, (1), (2) は図形の名称も書け。 47点

(1) $\begin{cases} y \geqq \frac{7}{4}x - 3 \\ y \leqq \frac{1}{2}x + 2 \\ y \geqq -2x - 3 \end{cases}$ 図形の名称: 直角三角形 ⑤

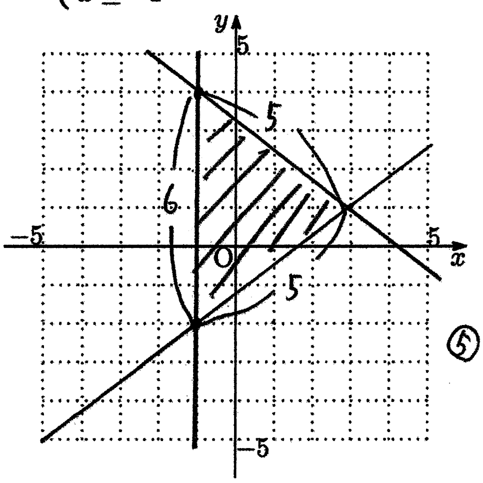


⑤

面積

$2\sqrt{5} \times 3\sqrt{5} \times \frac{1}{2} = 15$ ⑤

(2) $\begin{cases} 3x - 4y - 5 \leqq 0 \\ 3x + 4y - 13 \leqq 0 \\ x \geqq -1 \end{cases}$ 図形の名称: 二等辺三角形 ⑤

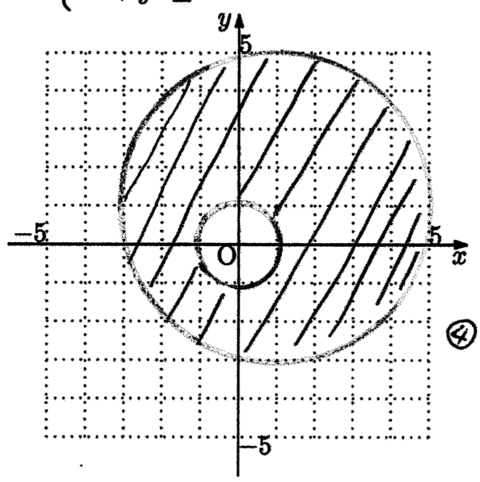


⑤

面積

$6 \times 4 \times \frac{1}{2} = 12$ ④

(3) $\begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 \leqq 16 \\ x^2 + y^2 \geqq 1 \end{cases}$



④

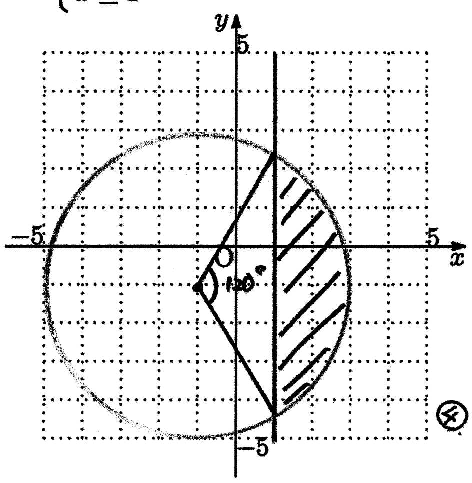
面積

大きい円 $4 \times 4 \times \pi = 16\pi$

小さい円 $1 \times 1 \times \pi = \pi$

$16\pi - \pi = 15\pi$ ⑤

(4) $\begin{cases} (x+1)^2 + (y+1)^2 \leqq 16 \\ x \geqq 1 \end{cases}$



④

面積

扇形 $4 \times 4 \times \pi \times \frac{120}{360} = \frac{16}{3}\pi$

三角形 $4\sqrt{3} \times 2 \times \frac{1}{2} = 4\sqrt{3}$

$\frac{16}{3}\pi - 4\sqrt{3}$ ⑤